Concours ENSAE BL session 2019
Épreuve de Mathématiques II
(Analyse et Probabilités)
commune avec l'ÉNS Paris Saclay
Rapport du jury

Gabriel Faraud – Dominique Schiltz

Rappelons que l'épreuve consiste en une demi-heure de préparation, pour laquelle le candidat se voit proposer un exercice d'analyse et un de probabilités, suivie d'une demi-heure de passage qui débute par la présentation des résultats obtenus par le candidat et se poursuit par un dialogue avec le jury. Précisons que la durée réglementaire de 30 minutes comprend l'accueil et le départ du candidat, de sorte que celle de la planche proprement dite est légèrement inférieure.

Nonobstant le changement de programme de Mathématiques des classes de Lettres et Sciences Sociales, la plupart des commentaires formulés dans le rapport 2018 restent valables, et le futur candidat pourra le consulter avec profit, le présent rapport 2019 étant conçu en complément du précédent. Nous commencerons par évoquer les aspects saillants de la présente session, à savoir la conformité des planches au programme, le temps de préparation et le déroulement de la planche.

La conformité au programme

Avant tout, que les candidats et leurs professeurs soient convaincus que les interrogateurs ont eu connaissance du changement de programme de mathématiques des classes de Lettres et Sciences Sociales, et qu'ils ont en leur possession un exemplaire de ce programme. Ils tiennent le plus grand compte de ce document dans le choix des exercices qui sont proposés aux candidats. Néanmoins, il nous a paru utile d'examiner en détail la conformité ou non de certaines notions avec ce programme.

La partie entière

Le programme officiel ne fait pas mention de la notion de partie entière d'un nombre réel. Or c'est une notion très simple et intuitive, souvent étudiée au lycée et qui est utilisée dans des exercices classiques : par exemple, l'étude de la partie entière de la loi exponentielle. En interrogeant sur un exercice de probabilités – la détermination des modes de la loi binomiale – où la partie entière permettait d'expliciter simplement le résultat cherché, nous avons constaté que *tous* les candidats auxquels cet exercice a été proposé connaissaient la définition de la partie entière. D'ailleurs, tout ce qu'il suffit de savoir est que la partie entière d'un réel x est l'unique entier n tel que $n \leq x < n + 1$. Cette notion pourra être utilisée dans certaines de nos planches à l'avenir, dans ce cas sa définition sera bien sûr fournie dans l'énoncé.

La convergence absolue

Plusieurs exercices faisaient appel implicitement à la convergence absolue d'une série ou d'une intégrale. Cette notion n'est pas explicitement au programme, mais les variables aléatoires qui y sont considérées n'étant pas nécessairement positives, elle peut intervenir dans la définition de leur espérance, en particulier quand elle est calculée à l'aide du théorème de transfert pour une fonction de variable aléatoire. Certains candidats ne semblaient pas la connaître, par contre ils nous ont cité la règle des séries alternées alors que ce résultat est nettement plus éloigné de l'esprit du programme. À l'avenir, certaines de nos planches pourront comporter une question où il peut être utile d'avoir recours à la convergence absolue.

La variance d'une somme de *n* variables aléatoires discrètes

Cette notion n'est pas explicitement au programme qui ne considère que le cas de deux variables aléatoires. Le calcul de la variance de la somme de n variables aléatoires indépendantes s'extrapole aisément à partir du cas de deux variables aléatoires, par contre si elles ne sont pas indépendantes il requiert l'emploi d'une formule spécifique. En l'absence de mention de celle-ci dans le programme, nous n'avons pas inclus dans nos exercices de questions comportant le calcul de la variance d'une somme de n variables aléatoires non indépendantes. Toutefois, cela nous paraît une notion importante et d'usage relativement courant, car il est assez fréquent qu'une variable aléatoire s'interprète comme somme de variables aléatoires dont les lois marginales et les lois de couples sont connues, particulièrement des lois de Bernoulli. C'est notamment le cas quand on considère le nombre de succès dans une succession d'épreuves non indépendantes, par exemple des tirages sans remise. Il n'est pas exclu qu'à l'avenir certaines planches comportent une question de ce genre, dans ce cas nous fournirons l'expression générale de la variance d'une somme de variables aléatoires discrètes.

La covariance de variables aléatoires à densité

Sur ce point, le programme officiel dit : *« On pourra, comme en première année, introduire la covariance et le coefficient de corrélation sans discuter les problèmes de définition des intégrales.*
$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big)$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$,
$\mathrm{Cor}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$.
La covariance de deux variables indépendantes est nulle (condition non suffisante). »
Si le programme officiel fournit les formules de calcul de la covariance et du coefficient de corrélation pour les variables aléatoires à densité, c'est que l'on peut les utiliser dans les exercices. Certes, la détermination de la loi des couples de variables aléatoires à densité est hors programme, mais il est des situations où il est possible de calculer la covariance sans utiliser cette loi. Nous avons renoncé cette année à poser des exercices où c'était le cas pour ne pas risquer de déstabiliser les candidats, mais nous envisagerons d'en proposer à l'avenir.

Les dénombrements

Le préambule de la partie IV du programme de première année indique : *« Les variables aléatoires finies ou discrètes sont plus à envisager comme un contexte dans lequel certaines des propriétés importantes peuvent être démontrées de manière simple que comme une source d'exercices de dénombrement. »* Cette formulation n'interdit pas de faire intervenir des dénombrements dans des exercices, elle tend seulement à ce qu'ils n'en soient pas l'unique objet. Or il est fréquent que la détermination de la loi d'une variable aléatoire nécessite un calcul de dénombrement, du fait que dans une situation d'équiprobabilité on utilise la formule de Bernoulli $\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}\,A}{\mathrm{Card}\,\Omega}$. Or face à cette situation, de nombreux candidats se sont avérés incapables de dénombrer les cas favorables à la réalisation de A, et même les cas possibles, y compris quand ce dénombrement n'utilisait que les coefficients du binôme, alors que le programme précise à leur sujet : *« On introduira à cette occasion les coefficients binomiaux de manière combinatoire »*, ce qui montre bien qu'on les considère aussi du point de vue des dénombrements. Aussi, nous continuerons à poser des exercices comportant une question consistant en la détermination de la loi d'une variable aléatoire à l'aide de raisonnements simples de dénombrement.

Le théorème de Cesàro

Ce théorème n'est pas explicitement au programme, et de ce fait nous l'avons énoncé dans tous les exercices où son emploi était requis. Toutefois, il nous paraît utile que les candidats le connaissent en raison de son utilité pour déterminer dans de nombreuses situations un équivalent simple du terme général d'une suite récurrente. Certaines de nos prochaines planches sur les suites numériques pourront comporter une question utilisant ce théorème, dans ce cas nous en rappellerons encore l'énoncé.

Le temps de préparation

Au vu de ce qui a été traité – et de ce qui n'a pas été – par les candidats pendant leur préparation, il nous semble que le temps dévolu à celui-ci est généralement mal employé. Les calculs et les raisonnements sont souvent seulement esquissés, et de nombreux candidats ne sont pas en mesure de présenter un raisonnement suivi et argumenté basé sur la connaissance du cours. À notre avis, les professeurs pourraient prêter attention à ce point au cours de l'année : dans le déroulement habituel des interrogations orales, les étudiants sont généralement confrontés d'emblée à un exercice sans disposer d'un temps de réflexion préalable, celui-ci n'étant prévu que pour les interrogations de préparation à l'oral qui ont lieu après l'écrit. Nous pensons qu'il serait bon de prévoir plus tôt dans l'année un temps de préparation, au moins pour les étudiants qui préparent des concours comportant un oral de mathématiques. Cela leur permettrait de s'entraîner à rédiger plus soigneusement les calculs et les raisonnements requis, à réfléchir aux définitions et résultats du cours auxquels il est fait appel et à envisager des stratégies pour les questions qu'ils n'auraient pas su aborder.

Le déroulement de la planche

Cette année, plusieurs candidats se sont comportés de manière assez maladroite au cours de leur interrogation. Il ne nous paraît pas habile d'annoncer d'emblée qu'ils n'ont pas su faire grand-chose pendant leur préparation : il en résulte déjà un a priori négatif de l'interrogateur ; il vaut mieux qu'ils essaient de valoriser ce qu'ils ont réussi à traiter, même partiellement. Nous sommes toujours surpris qu'un candidat s'excuse d'une erreur de calcul ou de raisonnement : ce n'est pas à nous qu'il cause du tort mais à lui-même ; tout au plus pourrait-il dire « en effet, j'ai commis une erreur ici, je vais la corriger ». Plusieurs nous ont posé des questions sur la planche, soit pour solliciter notre approbation, soit pour demander comment traiter telle ou telle question : il convient de rappeler que c'est l'interrogateur qui pose les questions, et qu'il fournit les indications qui lui paraissent utiles au moment opportun sans que le candidat ait à les lui demander. Enfin, nous avons été quelque peu indisposés par quelques candidats qui ne nous écoutent pas lorsque nous leur adressons la parole, mais nous interrompent systématiquement en proposant une piste – le plus souvent fausse – de résolution de la question en cours. Très vite, nous renonçons à leur donner des indications, et ils ne peuvent plus compter que sur eux-mêmes pour continuer l'exercice.

Par ailleurs, ce que nous avons écrit l'an dernier sur la gestion du tableau reste valable : plusieurs candidats ne savent pas organiser ce qu'ils écrivent, utilisent toute la surface puis terminent leur calcul de manière peu lisible dans un petit coin du tableau, effacent sans discernement et réécrivent au milieu de questions déjà traitées. Il est important de s'entraîner à écrire de manière lisible mais compacte, à utiliser rationnellement la surface disponible et à ne pas écrire ce qu'il suffit d'indiquer oralement, comme le nom du théorème employé ou les propriétés requises des objets mathématiques étudiés. Cela rejoint la question de la gestion du temps : inutile de s'attarder sur des points de détail ou de développer des raisonnements standards comme la linéarité d'une application ou la continuité d'une fonction explicitement fournies. Si l'examinateur souhaite que le candidat fournisse davantage de détails, il le lui dira sans qu'il lui soit reproché d'avoir été succinct. Rappelons que le candidat ne dispose que d'une demi-heure pour mettre en valeur ses qualités mathématiques, et qu'il convient par conséquent d'utiliser au mieux son temps pour cela.

Commentaires par chapitre du programme

<u>Les raisonnements par récurrence</u>

Il est arrivé fréquemment qu'un candidat propose d'effectuer un raisonnement par récurrence alors que ce n'est nullement nécessaire, comme par exemple pour établir que la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ est croissante. Par contre, la nécessité d'une récurrence double n'est pas toujours perçue, et quand c'est le cas, le candidat omet souvent de vérifier pour deux valeurs successives de l'indice la propriété à démontrer. En outre, il n'est pas pertinent de vérifier à l'indice 0 une propriété qu'on demande de démontrer pour tout entier naturel non nul.

<u>Les limites</u>

La définition de cette notion est au programme, qu'il s'agisse de limites de suites ou de fonctions. Si aucun exercice ne requiert d'en faire un usage systématique, il est néanmoins nécessaire de connaître cette définition dans les principaux cas – limite finie ou infinie, limite en un point ou en l'infini – de façon à être en mesure de traiter des exercices plus élaborés, comme par exemple la détermination de la limite de la suite (nI_n) où $I_n = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt}dt$, f étant une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$.

<u>Les équivalents et les développements limités</u>

Les calculs sur les équivalents sont souvent laborieux voire faux. Outre des fonctions équivalentes à zéro, nous avons vu prendre l'exponentielle ou le logarithme d'équivalents, ou maintenir des termes négligeables, par exemple $u_n \sim n + \ln n$, ou encore écrire $f(x) \sim x + 2$ au voisinage de $+\infty$ pour en déduire une asymptote oblique à la courbe représentative de f. Il n'allait pas de soi de déduire un équivalent simple d'un développement limité. Quand cette dernière notion était requise, elle a mis en évidence plusieurs lacunes : les développements des fonctions usuelles sont rarement connus, les calculs comportent souvent des erreurs, et surtout le reste est soit faux, soit mal pris en compte. Ainsi, écrire un développement limité de la forme $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x)$ dénote une mauvaise compréhension de cette notion.

Les séries

Les séries géométriques et dérivées et exponentielles sont généralement reconnues et les candidats savent généralement calculer leur somme. Il en va de même pour les séries télescopiques, bien que certains effectuent le télescopage sur la série complète et non sur la somme partielle, ce qui peut être source de déboires si les séries obtenues par séparation de la série d'origine sont divergentes, et même donner un résultat faux si leur terme général ne tend pas vers 0. Le calcul d'une somme géométrique finie pose davantage de problèmes.

Les intégrales

Les problèmes rencontrés par les candidats concernant cette notion tenaient surtout à leur encadrement. Encadrer la fonction intégrée n'allait déjà pas de soi : choisir le facteur à conserver et celui à encadrer, déterminer le sens de variation de ce facteur et en déduire un encadrement, reporter celui-ci dans la fonction intégrée, puis en déduire un encadrement de l'intégrale, autant d'étapes requérant de la réflexion et de la rigueur dans les calculs. Restait à calculer les intégrales en résultant, ce qui était paradoxalement d'autant plus laborieux que les fonctions obtenues étaient simples, surtout quand elles ne dépendaient pas de la variable d'intégration.

Les calculs d'intégrales, même de fonctions simples, ont également été souvent laborieux. Passons sur la confusion fréquente entre dérivée et primitive. Les intégrations par parties posaient souvent problème en raison d'un mauvais choix du facteur à primitiver : il est rare que ce soit le logarithme, par contre si une exponentielle est présente c'est souvent le bon choix, mais si elle est de la forme $\exp(-kx^2)$ où k est un réel positif, on lui adjoint généralement un facteur x pour que cette primitive soit également une exponentielle. Quand un changement de variable était nécessaire, les candidats avaient souvent des difficultés à déterminer celui qui était le plus pertinent dans la situation étudiée, et sa mise en œuvre comportait fréquemment des erreurs de calcul, notamment sur l'élément différentiel ou les nouvelles bornes de l'intégrale.

Les probabilités

Dans plusieurs exercices, on s'attend à ce que les candidats définissent des événements, mais souvent ceux-ci ne le font pas, et quand ils le font, leur définition ou leur notation est souvent maladroite. Ainsi, plutôt que de dire *« Je note F l'évènement "obtenir Face" »*, un candidat devrait annoncer par exemple *« Pour tout entier naturel non nul k, je note F_k l'évènement "le premier joueur obtient Face au k-ième lancer" et F'_k l'évènement "le deuxième joueur obtient Face au k-ième lancer" »*. Toutefois, toute tentative de formalisation est encouragée, car la résolution d'un exercice de probabilités ne saurait se limiter à une succession de calculs numériques sans aucune justification. Il est également apprécié qu'un candidat commence par raisonner sur les évènements avant de considérer leurs probabilités, ce qui lui permet de justifier plus aisément les sommes et produits de celles-ci quand il les introduit dans ses calculs. Cependant, quand ils font un produit de plusieurs probabilités, les candidats invoquent souvent à tort l'indépendance des évènements concernés, alors qu'ils ont en fait pris les probabilités conditionnées par la réalisation des évènements précédents, sans se rendre compte qu'ils utilisaient la formule des probabilités composées. Enfin, certaines questions ont fait intervenir la limite de $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ quand n tend vers l'infini : or contrairement à une croyance répandue, cette limite n'est pas égale à 1.

Les variables aléatoires discrètes

La détermination du support d'une variable aléatoire finie ou dénombrable est souvent incorrecte par insuffisance de réflexion sur la nature de l'expérience considérée. Une question classique que nous avons posée plusieurs fois a été inégalement traitée, à savoir prouver que si elle existe, l'espérance d'une variable aléatoire X à support contenu dans $\mathbb{N}$ est égale à $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X > n)$.

Les variables aléatoires à densité

Outre la confusion parfois constatée entre la densité et la fonction de répartition, l'expression de celle-ci sous forme d'une intégrale n'est pas toujours fournie, et les fonctions de répartition des lois usuelles à densité ne sont pas bien connues. Par ailleurs, il n'est pas rare que dans un exercice sur les intégrales, une question consiste à déterminer la valeur d'une intégrale en se ramenant à l'intégrale de la densité de la loi normale centrée réduite sur $\mathbb{R}$ ou sur $[0, +\infty[$: non seulement l'expression de cette dernière doit être connue, mais le candidat devrait également être capable de déterminer, selon l'intégrale considérée, par quel changement de variable ou quelle intégration par parties il peut se ramener à cette intégrale. Enfin, dans le même ordre d'idée que dans l'alinéa précédent, il est bon que les candidats sachent démontrer que si elle existe, l'espérance d'une variable aléatoire X positive à densité continue est égale à $\int_0^{+\infty} Q(t)dt$, où $Q(t) = P(X > t)$.

Conclusion

Le présent rapport a été rédigé dans l'esprit de compléter celui de 2018. Nous n'avons pas repris les remarques formulées dans celui-ci, alors même qu'un grand nombre d'entre elles sont encore d'actualité pour la session 2019. Dans leur préparation de la session 2020 du concours, nous incitons donc les candidats et leurs professeurs à le consulter également. Comme l'année dernière, nous publions une sélection de planches proposées aux candidats de cette année.