Exemples de sujets posés à l'oral 2019

On trouvera ci-dessous deux sujets proposés à la session 2019.

Sujet 1

Exercice 1

Soit E le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par

$$E = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que si deux matrices A, B sont dans E alors la matrice AB est encore dans E. Déterminer $\dim(E)$.
2. Soit $M(a,b,c)$ un élément de E. Déterminer son rang suivant les valeurs des paramètres réels a, b et c. Calculer, lorsque cela est possible, son inverse $M(a,b,c)^{-1}$.
3. Donner une base de E formée de matrices inversibles et une autre formée de matrices de rang 1.

Exercice 2

Soient n un entier naturel non nul et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et suivant toutes *la loi de Fréchet*, c'est-à-dire vérifiant, pour tout réel t,

$$\mathbb{P}(X_i \leq t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $\mathbb{E}[X_i] < +\infty$, autrement dit la variable aléatoire X_i admet un premier moment fini. Que vaut $\mathbb{E}[X_i^2]$?
2. On note $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ la plus grande valeur prise par les variables X_i, $i \in \{1, \dots, n\}$.

   Montrer l'existence d'un unique réel non nul a_n, que l'on déterminera, tel que la variable aléatoire $\dfrac{M_n}{a_n}$ suive également la loi de Fréchet.

Sujet 2

Exercice 1

On considère la matrice :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel et d'une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.
Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice est A relativement à la base $\mathscr{B}$.

1. Montrer que l'endomorphisme p est une projection.
2. Déterminer une base de l'image de p et une base du noyau de p.
3. Démontrer que p est une projection orthogonale.
4. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice 2

Une urne contient initialement deux boules blanches et deux boules noires.
Soit c un entier naturel. On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant :

- On tire au hasard une première boule. Si elle est blanche on s'arrête. Si elle est noire, on remet la boule noire dans l'urne. Puis on ajoute encore c boules noires dans l'urne.
- On recommence ainsi jusqu'à obtenir une boule blanche si on finit par obtenir une boule blanche, ou indéfiniment si l'on n'obtient jamais de boule blanche.

Pour tout entier naturel non nul, on note E_n l'événement : « les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules noires ».
Soit X la variable aléatoire égale au rang du tirage auquel on a obtenu une boule blanche si on finit par obtenir une boule blanche, et égale à 0 sinon.

1. Quelle est la loi de X dans le cas $c = 0$?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer la probabilité $\mathbb{P}(E_n)$ à l'aide d'un produit.
3. On suppose dans cette question que l'on a $c = 1$.
   (a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout entier naturel non nul n.
   En déduire la valeur de la probabilité $\mathbb{P}(X = 0)$.
   (b) Déterminer deux réels α et β vérifiant, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{\alpha}{n+1} - \frac{\beta}{n+2}$.
   En étudiant la série $\sum (n+3)\mathbb{P}(X = n)$, démontrer que la variable aléatoire X admet une espérance et la calculer.
4. On suppose dans cette question que l'on a $c = 2$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout entier naturel non nul n. En déduire la valeur de la probabilité $\mathbb{P}(X = 0)$.
   (b) Donner la loi de X. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?