Exemples de sujets posés à l'oral 2021

Sujet 1

Exercice 1
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)} \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}.$$

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convergence des intégrales I_n et J_n.
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $I_n + J_n$.
3. Au moyen du changement de variable $u = 1/x$, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales I_n et J_n.
4. La suite $\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? La série $\displaystyle\sum \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}$ est-elle convergente ?

Exercice 2
On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de « pile » soit égale à $p \in]0,1[$. On note $q = 1 - p$.
Soit N un entier naturel non nul. On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de « 6 » obtenus, on lance alors n fois la pièce.
On définit les trois variables X, Y, Z de la manière suivante :

- Z indique le nombre de « 6 » obtenus aux lancers du dé
- X indique le nombre de « piles » obtenus aux lancers de la pièce
- Y indique le nombre de « faces » obtenus aux lancers de la pièce.

Ainsi, on a $X + Y = Z$.

1. Pour tout $k \in \{0, \ldots, N\}$, pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X = k \mid Z = n)$ (sans calcul).
   En déduire, pour tout couple $(k, n) \in \{0, \ldots, N\}^2$, la valeur de la probabilité $\mathbb{P}([X = k] \cap [Z = n])$.
2. Montrer, pour tout couple (k, n) d'entiers naturels vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$, l'identité :
$$\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}.$$
3. Démontrer que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres N et $p/6$.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Sujet 2

Exercice 1

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires. On notera $\mathbb{P}[A]$ la probabilité d'un évènement $A \in \mathscr{A}$ et $\mathbb{E}[X]$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles.

Soit $n \geq 1$ un entier naturel et soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes telles que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}[X_k = 1] = \mathbb{P}[X_k = -1] = \frac{1}{2}.$$

On définit

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. Soit Z une variable aléatoire discrète telle que $\exp(\alpha Z)$ est d'espérance finie pour tout $\alpha > 0$. Montrer que pour tout $\alpha > 0$ et $t \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{P}[Z \geq t] \leq \mathrm{e}^{-\alpha t} \mathbb{E}[\exp(\alpha Z)].$$
2. Montrer que, pour tout $t \in [-1, 1]$ et tout $\lambda > 0$,
$$\frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[S_n \geq t] \leq \ln(\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda X_1}]) - \lambda t.$$
3. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\frac{\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}}{2} \leq \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}$.
4. En déduire que pour tout $t \in [-1, 1]$,
$$\frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[S_n \geq t] \leq -\frac{t^2}{2}.$$

Exercice 2

1. Etudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et pour tout $n \geq 0$, $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}$.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions f de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, continues sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et telles que :
$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \; f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right).$$
3. Déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right).$$