UHCE 054

J. 20 1197

SESSION 2020

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon – Paris-Saclay – ENSAE – ENSAI

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Tournez la page S.V.P.

Les problèmes qui suivent sont indépendants les uns des autres.

$$* * *$$

Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

$$* * *$$

Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les $\boxed{\textit{encadrant}}$, *en les* <u>*soulignant*</u> *ou en les* *surlignant*. *Lors de la correction, il sera fait grand cas de la* ***clarté***, *de la* ***concision*** *et de la* ***précision*** *de la rédaction.*

$$* * *$$

PROBLÈME A.

(1) Soit $\theta \in \mathbf{R}$ un nombre réel.

(a) Exprimer de deux façons différentes les parties réelle et imaginaire de $\left(e^{i\theta}\right)^2$.

(b) En déduire que

$$\cos^2(\theta) = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}.$$

(2) On considère la fonction d'une variable réelle $\varphi : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

(a) Quel est son domaine de définition ?

(b) Montrer que son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

(c) Justifier que φ est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer $\lim\limits_{x\to -1} \varphi'(x)$.

(d) Tracer le graphe de φ en faisant apparaitre les informations des questions précédentes.

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et de même loi uniforme dans $[0,1]$. On admet que, pour tout sous-ensemble A de $\mathbf{R}^2$, la probabilité de l'évènement $[(X,Y)\in A]$ est donnée par l'aire de l'ensemble $A \cap [0,1]^2$.

(3) Pour tout réel positif r, on définit l'ensemble

$$\mathcal{Q}_r = \left\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 :\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq r^2\right\}.$$

(a) Tracer les ensembles $\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}}$ et $\mathcal{Q}_1$.

(b) Que vaut $\mathbb{P}\big((X,Y)\in \mathcal{Q}_1\big)$?

(c) Justifier que, pour n'importe quel $t \in [0,1]$,

$$\mathbb{P}\big((X,Y) \in \mathcal{Q}_1 \;\text{ et }\; 0 \le X \le t\big) = \int_0^t \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

(d) À l'aide du changement de variable $x = \sin(\theta)$, montrer que

$$\mathbb{P}\left((X,Y) \in \mathcal{Q}_1 \;\text{ et }\; 0 \le X \le \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}\,.$$

(e) Les évènements $\big[(X,Y) \in \mathcal{Q}_1\big]$ et $\big[0 \le X \le \frac{1}{2}\big]$ sont-ils indépendants ?

(4) On s'intéresse à la variable aléatoire $D = \sqrt{X^2+Y^2}$. On souhaite calculer la fonction $F_D : t \in \mathbf{R} \mapsto \mathbb{P}(D \le t)$.

(a) Quel est l'ensemble des valeurs que peut prendre D ?

(b) Trouver l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles $F_D(t) = 0$ puis celui pour lesquelles $F_D(t) = 1$.

Pour $t \ge 0$, on définit

$$I(t) = \int_0^t \sqrt{t^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

(c) Montrer que $I(t) = t^2 I(1)$.

(d) En déduire la valeur de $F_D(t)$ lorsque $t \in [0,1]$.

(e) Pourquoi ne peut-on pas étendre ce raisonnement pour $t > 1$?

(f) Quelle intégrale faudrait-il calculer (on ne demande pas de la calculer) pour obtenir les valeurs $F_D(t)$ manquantes ?

(g) Montrer que D ne suit pas une loi uniforme.

PROBLÈME B.

On considère deux nombres réels $r > 0$ et $s \in\,]0,1]$, ainsi que trois suites de nombres réels $(a_k)_{k\ge1}$, $(b_k)_{k\ge1}$ et $(c_k)_{k\ge1} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}^\star}$ vérifiant

$$\forall k \ge 1, \qquad \begin{cases} a_{k+1} = r\,b_k + r\,c_k \\ b_{k+1} = a_k \\ c_{k+1} = s\,b_k \end{cases}.$$

On introduit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & r & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad F_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}, \quad k \ge 1.$$

(5) Dans cette question, on suppose que, lorsque k tend vers $+\infty$, a_k tend vers $a > 0$, b_k tend vers $b > 0$ et c_k tend vers $c > 0$. Montrer que $r + rs = 1$.

(6) Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathbf{M}_3(\mathbf{R})$ et trois réels $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ tels que

$$P^{-1}MP = \Lambda\,, \qquad \text{avec} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

(a) On note $G_k = P^{-1}F_k$. Montrer que $G_{k+1} = \Lambda G_k$.

(b) Pour $k \geq 1$, exprimer G_k en fonction de G_1 et de Λ.

(c) Montrer que si $\lambda_1 > -1$ et $\lambda_3 < 1$, alors les coefficients de G_k tendent tous vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.

(d) Montrer que si $\lambda_1 > -1$ et $\lambda_3 < 1$, alors les coefficients de F_k tendent tous vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.

(7) On admet que les valeurs propres de M sont les zéros de la fonction polynomiale $\chi : x \in \mathbf{R} \mapsto -x^3 + rx + rs$.

(a) En quels points la fonction χ admet-elle des extremums locaux ?

(b) Montrer que la matrice M a exactement une valeur propre strictement positive.

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que χ ait 3 zéros réels distincts deux à deux.

On suppose désormais que cette condition est satisfaite, c'est-à-dire que la fonction polynomiale χ se factorise sous la forme

$$\chi(x) = -(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)$$

où les nombres réels λ_1, λ_2, λ_3 vérifient $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

(d) Montrer que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

(e) En déduire que $|\lambda_2| < |\lambda_1| < \lambda_3$.

(f) Montrer que, si $r + rs = 1$, alors la plus grande valeur propre de M est égale à 1.

(g) Montrer que, si $r + rs < 1$, alors les coefficients de F_k tendent tous vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.

On suppose dorénavant que la condition de la question *(c)* n'est pas satisfaite. La fonction polynomiale χ se factorise alors sous la forme

$$\chi(x) = -(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)$$

avec λ_1, $\lambda_2 \in \mathbf{C}$ et $\lambda_3 \in \mathbf{R}$.

(h) Comment peut-on généraliser la question *(e)* ?

PROBLÈME C.

On s'intéresse au problème d'optimisation suivant : on souhaite fixer la valeur de q variables $x_1, x_2, \ldots, x_q$ de sorte à satisfaire p demandes différentes de la forme

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\}, \qquad a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \cdots + a_{iq}\, x_q = y_i \,,$$

où les a_{ij}, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$ et y_i, $1 \leq i \leq p$ sont des nombres réels fixés. Il n'est pas toujours possible de satisfaire simultanément ces p demandes. Le cas échéant, on cherche le vecteur $(x_1, \ldots, x_q) \in \mathbf{R}^q$ qui minimise la fonction, dite de *mécontentement*,

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbf{R}^q & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & (x_1, \ldots, x_q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \left(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{iq}x_q - y_i\right)^2 \end{array} .$$

Préliminaires.

(8) Expliquer en quelques mots pourquoi il est pertinent de chercher à minimiser la fonction φ pour répondre au problème.

(9) Soient $z_1, z_2, \ldots, z_p$ des nombres réels. Montrer l'équivalence suivante :

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z_1 = z_2 = \cdots = z_p = 0 \,.$$

On introduit la notation $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_{pq}(\mathbf{R})$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_q) \in \mathbf{R}^q$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbf{R}^p$, et on note respectivement X et Y les vecteurs colonnes représentant $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$.

(10) Montrer que $\varphi(x_1, \ldots, x_q) = 0$ si et seulement si $AX = Y$.

Un cas particulier. On cherche à minimiser le mécontentement pour le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x + y & = 2 \\ x + 2y & = 1 \\ x + 3y & = 3 \end{cases} , \tag{1}$$

c'est-à-dire à minimiser la fonction de deux variables

$$\psi : (x, y) \mapsto 3x^2 + 14y^2 + 12xy - 12x - 26y + 14 \,.$$

(11) À quels choix de p, q, A et Y cet exemple correspond-il ?

(12) Montrer que le système (1) n'a pas de solution.

Nous utiliserons les notations officielles $\partial_1\psi$ et $\partial_2\psi$ pour désigner les dérivées partielles de ψ. Si vous préférez, vous pouvez également utiliser les notations usuelles $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\psi}{\partial y}$.

(13) Calculer les dérivées partielles de ψ.

(14) Montrer que $\partial_1\psi(x, y) = \partial_2\psi(x, y) = 0$ si et seulement si (x, y) est solution du problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + 2y & = 2 \\ 6x + 14y & = 13 \end{cases} .$$

(15) Résoudre ce système.

(16) Montrer que ψ admet un minimum local en ce point.

Tournez la page S.V.P.

Généralisation. On note $\mathbf{u}$ l'application linéaire représentée par la matrice A, ainsi que $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ l'application linéaire représentée par la matrice transposée A^{T}.

(17) Montrer que $\varphi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}, \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{y} \rangle$.

(18) Montrer que,

$$\forall \mathbf{x}' \in \mathbf{R}^q, \qquad \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = \varphi(\mathbf{x}) + 2 \left\langle \mathbf{x}', \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}) \right\rangle + \left\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}'), \mathbf{u}(\mathbf{x}') \right\rangle . \tag{2}$$

(19) On suppose que $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Montrer que $\mathbf{x}$ minimise φ, c'est-à-dire que, pour tout $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^q$, $\varphi(\mathbf{z}) \geq \varphi(\mathbf{x})$.

(20) On suppose que $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}) \neq \mathbf{0}$. En appliquant (2) au vecteur $\mathbf{x}' = s\, \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{y})$ avec $s \in \mathbf{R}$, montrer que φ n'admet pas de minimum local en $\mathbf{x}$.

(21) Montrer que φ admet un unique minimiseur si et seulement si $\mathbf{u}$ est injective.