Banque Lettres et Sciences Economiques et Sociales

Épreuve écrite de mathématiques 2018

Emilie Kaufmann, Igor Kortchemski

Durée : 4 heures **Calculatrice interdite**

Table des matières

1 Commentaires généraux

Structure du sujet. Le sujet était composé de trois problèmes indépendants permettant d'aborder diverses notions couvrant les trois grands axes du programme.

Nous avons porté une attention particulière à proposer aux candidats des questions abordables dans chaque partie, mais également à poser régulièrement des questions plus délicates pour permettre aux meilleurs candidats de se distinguer.

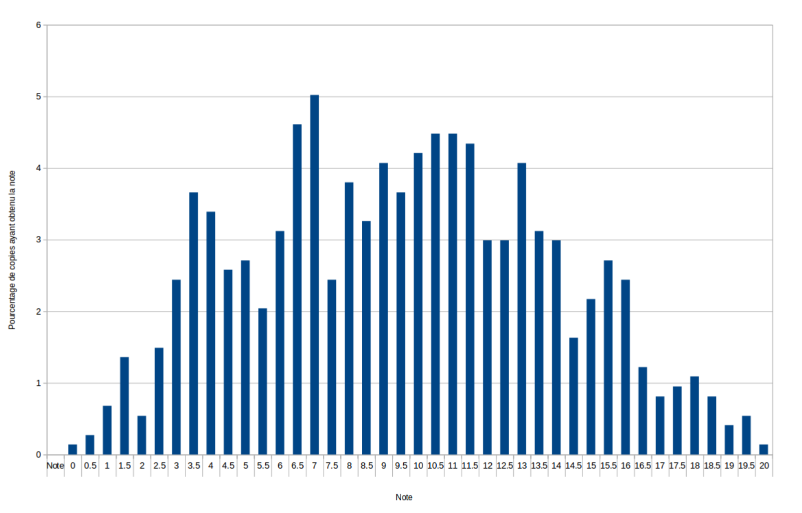

Figure 1 – Histogramme des notes de l'écrit (736 candidats).

Le premier problème mêlait analyse et probabilités discrètes, avec l'accent mis sur la modélisation car il s'agissait de comprendre le fonctionnement d'un algorithme aléatoire de recherche d'un élément dans un ensemble, qui pouvait se modéliser à l'aide de lois géométriques. L'objectif était de contrôler avec grande probabilité le nombre d'étapes nécessaire pour trouver l'élément. Ce problème a mobilisé les notions d'étude de fonction et de développement limité, les propriétés des lois géométriques et plus généralement de l'espérance de variables aléatoires discrètes.

Le second problème visait à démontrer des équivalences entre l'inversibilité de certains endomorphismes, construits à partir de projecteurs. Il a permis aux candidats de manipuler les notions classiques d'algèbre linéaire (calcul matriciel, inversibilité d'un endomorphisme, noyaux, images, sommes directes...).

Le troisième problème était dédié à l'étude des fonctions à variation lente, ce qui a donné lieu à des développements en analyse (limites, intégration) et autour des probabilités continues.

Bilan général. Le sujet a permis de bien classer les candidats, y compris ceux ayant obtenu de faibles notes. La présence de questions simples sur beaucoup d'aspects du programme a récompensé les candidats ayant fourni un investissement minimal en mathématiques. Le pourcentage de candidats ayant obtenu une note $\leqslant 4/20$ est en légère augmentation par rapport à l'année dernière (14% en 2018 contre 10% en 2017), mais bien meilleur qu'en 2016 (20%).

Nous pouvons également signaler que le nombre de copies ayant obtenu au moins le tiers des points possibles (que nous qualifierons de bonnes copies) est en chute : 13% de bonnes copies, contre 20% en 2017 (mais cela reste mieux qu'en 2016 avec 10% de bonnes copies). Il nous semble qu'au moins deux facteurs puissent expliquer la chute du nombre de bonnes copies : d'une part, le sujet de cette année semble un peu plus long et difficile que celui de l'année dernière, et d'autre part les performances des candidats ont baissé sur une question quasiment identique, qui consistait à montrer qu'une matrice deux fois deux explicite était diagonalisable (29% de réussite cette année contre 37% en 2017).

Les dernières questions de chaque partie, de plus en plus difficiles, ont permis de départager les meilleures copies. Nous demeurons très satisfaits du niveau de ces meilleurs candidats qui, comme chaque année, abordent avec succès un grand nombre de questions et démontrent ainsi leur maîtrise de toutes les parties du programme. Ces excellents candidats feront à coup sûr de brillants élèves en mathématiques dans les écoles de la banque.

Ces dernières années, l'épreuve d'écrit a été adaptée au niveau des candidats. Elle propose davantage de questions simples et guidées dans lesquelles les candidats, même les plus modestes, doivent pouvoir s'exprimer. Ce nouveau format n'empêche aucunement la détection des très bons candidats, mais permet de mieux classer les très bonnes copies comme les plus faibles avec une bonne progression entre ces deux extrêmes, ce qui est important avec l'augmentation du nombre d'écoles dans la banque.

Transformation des notes brutes. Les copies étaient notées cette année sur 246 et la meilleure copie a obtenu une note brute de 185/246 (75% des points, contre 77.5% en 2017, 76.5% en 2016 et 75% en 2015). Si on applique une transformation linéaire aux notes brutes en les divisant par 10 et en arrondissant au demi-point le plus proche, on obtient l'histogramme rouge de la Figure 2.

Afin d'obtenir une courbe de notes, une moyenne, un écart-type et un pourcentage de notes $\geqslant 14/20$ similaire à ceux des autres matières, nous appliquons plutôt une transformation linéaire par morceaux pour obtenir une note finale sur 20 à partir de la note brute sur 246. Un des effets de cette transformation est, certes, de réduire l'écart entre les meilleures copies. Cependant, l'oral permet généralement de bien départager ces meilleurs candidats.

Insistons sur le fait que cette information est donnée à titre indicative, et il se peut que l'harmonisation effectuée en 2019 soit différente.

Évolution par rapport à 2017. Cette année, nous avons eu 736 candidats (contre 745 en 2017 et 802 en 2016). Comme en 2017, nous notons une absence de copies vides, ce dont nous nous réjouissons.

Le choix de la transformation linéaire par morceaux a été guidée par deux volontés :

– Une volonté de récompenser un investissement minimal en mathématiques. La moyenne générale de l'épreuve est ainsi du même ordre de grandeur qu'en 2017 (c'est-à-dire environ 9.5/20, contre 9.0/20 en 2016), mais avec un écart-type des notes $\geqslant 4$ plus élevé (3.8, contre 3.5 en 2017 et 3.7 en 2016).

– Une volonté de discriminer davantage les bonnes copies et de valoriser les excellents candidats en mathématiques. Ainsi, l'écart-type est en légère hausse, à 4.32 (contre 3.94 en 2017, sans toutefois remonter au niveau de 2016 à 4.55 hors zéros), ce qui provient d'une volonté d'étaler davantage les notes entre 14 et 20 (en effet, l'écart-type des notes $\geqslant 14$ est de 1.6 contre 1.2 en 2017). Par ailleurs, la moyenne des copies $\geqslant 10/20$ remonte au niveau de 2016 à 13.2/20 (contre 12.8/20 en 2017), et la proportion de notes $\geqslant 16$ remonte au niveau de 2016 à 8.5% (contre 6% en 2017).

Pour analyser les performances des candidats sur ce sujet, nous allons plutôt regarder les notes brutes $\boxed{\textbf{\textit{avant}}}$ transformation linéaire par morceaux (c'est-à-dires celles de la Figure 2), qui reflètent davantage le niveau réel des candidats. Tout d'abord, l'épreuve a été moins bien réussie cette année (moyenne à 4.9/20 contre 5.9/20 en 2017 et 4.3/20 en 2016), avec un niveau plus homogène comme en atteste un écart-type de 3.7 (contre 3.9 à la fois en 2017 et en 2016). Le pourcentage de notes $\leqslant 2$ remonte légèrement à 25% (contre 19.5% en 2017 et 39% en 2016). Le pourcentage de bonnes notes $\geqslant 10$ est en forte baisse à 10.5% (contre 18% en 2017 et 10.5% en 2016), mais le pourcentage de très bonnes notes $\geqslant 16$ est en hausse à 1.1% (contre 0.8% en 2017 et 1.4% en 2016). Enfin, le niveau des bonnes copies $\geqslant 10$ est plus hétérogène (écart-type à 2.4 contre 2.0 en 2017 et 2.6 en 2016), alors que les copies $\leqslant 10$ ont un écart type quasiment identique à celui de 2017 et à 2016 (à 2.6 contre 2.7).

Comme mentionné précédemment, la transformation linéaire par morceaux réduit l'écart entre les meilleures copies. Par exemple, à une note finale de 18/20 correspond en réalité une note brute de 13.5/20 (contre 16.5/20 en 2017 et 14.2/20 en 2016), et à une note finale de 14/20 correspond en réalité une note brute de 8.5/20 (contre 10/20 en 2017 et 8.4/20 en 2016). Comme nous l'avons dit, cette transformation provient de la nécessité d'adéquation aux courbes de notes des autres matières.

Table 1 – Éléments statistiques de comparaison entre les épreuves écrites de 2015, 2016, 2017 et 2018. Ces statistiques concernent l'ensemble des candidats inscrits à l'une au moins des écoles de la banque Lettres et Sciences économiques et sociales et présents à l'épreuve de mathématiques. Les copies « vides » sont les copies non blanches mais ayant obtenu la note zéro ; par exemple, celles des candidats s'étant bornés à recopier l'énoncé.

	2015	2016	2017	2018
Candidats présents	713	802	745	736
Copies blanches	5 (0,7%)	11 (1,4%)	0 (0%)	0 (0%)
Copies vides	29 (4,1%)	24 (3,0%)	0 (0%)	1 (1%)
Notes entre 0 et 1,5	57 (8%)	85 (10,6%)	11 (1,5%)	18 (2,4 %)
Notes entre 0,5 et 4,5	131 (18,4%)	138 (17,2%)	102 (13,7%)	121 (16,5 %)
Notes entre 10 et 20	316 (44,3%)	371 (46,3%)	367 (49,2 %)	358 (48,7%)
Notes entre 16 et 20	44 (6,2%)	68 (8,5%)	59 (7,9 %)	62 (8,4 %)
Moyenne	8,9	8,98	9,52	9,53
Écart-type	4,51	4,84	3,94	4,32
Médiane	9	9	9,5	9,5
Moyenne hors zéros	9,12	9,39	9,52	9,54
Écart-type hors zéros	4,34	4,55	3,94	4,31
Médiane hors zéros	9	9,5	9,5	9,5
Moyenne des notes $\geqslant 4$	10,4	10,53	10,12	10,34
Écart-type des notes $\geqslant 4$	3,4	3,71	3,49	3,8
Médiane des notes $\geqslant 4$	10	10,5	10	10

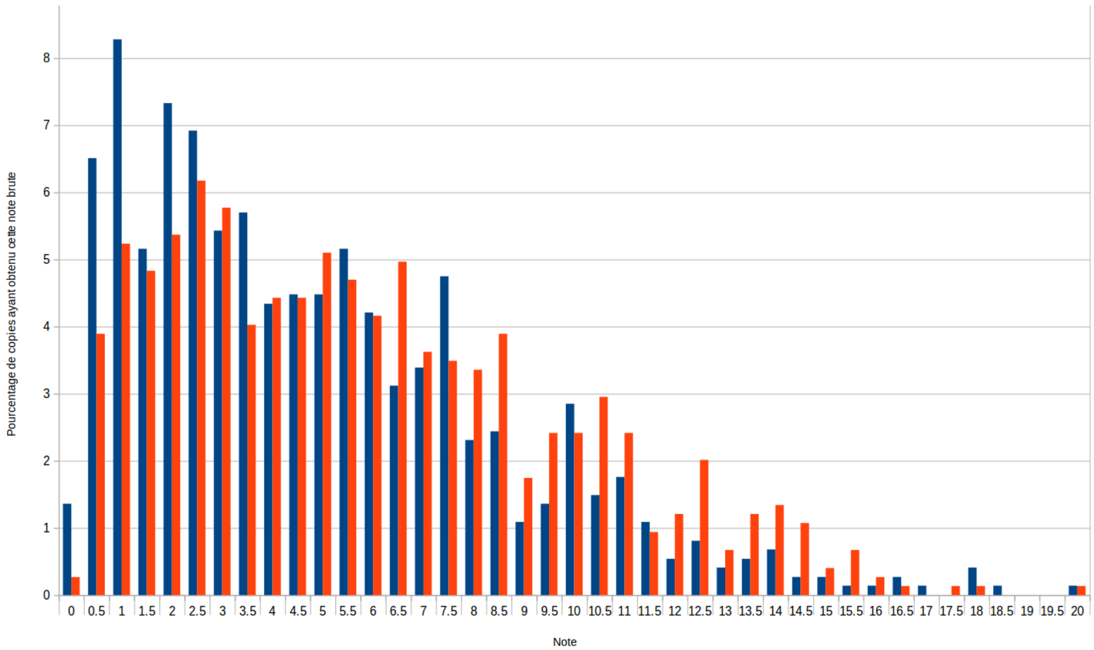

Figure 2 – Comparaison entre 2017 (en bleu) et 2018 (en rouge) des histogrammes des pourcentages de notes de l'écrit qui seraient obtenues par transformation linéaire à partir de la note brute : en bleu, 2017 (la moyenne serait de 5.9/20) et en rouge, 2018 (la moyenne serait de 4.9/20).

Difficulté du sujet. Comme chaque année, nous avons souhaité proposer des questions de difficultés variées sur toutes les thématiques du programme. Nous donnons ici une classification approximative des questions en groupes de difficulté croissante :

(1) Questions de cours, calculs numériques élémentaires, ou combinaison des deux : Problème A (1a)-(1b)-(5a), Problème B (1)-(2)-(4)-(11), Problème C (1)-(2).

En résolvant ces questions, on obtenait 10/20. En faisant la moitié de ces questions, on obtenait environ 6.5/20 (comme mentionné précédemment, le barème n'est pas linéaire et les premiers points sont plus faciles à obtenir).

(2) Questions classiques d'application du cours, ou demandant des calculs légèrement plus complexes ou abstraits : Problème A (2)-(4a)-(5b)-(6), Problème B (3)-(5)-(6)-(7)-(13)-(14), Problème C (4)-(6c)-(7)-(8a)-(8b).

En résolvant intégralement les questions de niveau 1–2, on obtenait environ 17/20. En faisant la moitié des questions de niveau 1–2, on obtenait environ 12/20.

(3) Raisonnements courts mais non classiques, ou questions reposant sur la résolution correcte de questions les précédant : Problème A (1c)-(3a)-(3b)-(5c)-(5d)-(5e)-(5f), Problème B (9)-(10)-(15), Problème C (3)-(5a)-(5b)-(4d)-(6a)-(8c)-(8d)-(9)-(10).

En résolvant intégralement les questions de niveau 1–3, on obtenait 20/20. En faisant toutes les questions de niveau 1 et la moitié des questions de niveau 2–3, on obtenait environ 17.5/20.

(4) Raisonnements plus fins et questions difficiles :
Problème A (4b), Problème B (8)-(12)-(16), Problème C (6b).

Cette année encore, aucune question n'a semblé bloquer les candidats en début d'exercice. De nombreuses copies ont tenté avec succès un grand nombre de questions dans les trois parties.

Il est à noter qu'à l'intérieur de chaque partie, les questions n'étaient pas forcément posées par ordre croissant de difficulté : par exemple, les questions Exercice (5d), Problème A (5b)-(7a), Problème B (5a)-(5b) ne sont pas très difficiles, mais les questions Exercice (4b), Problème A (1)-(3a), Problème B (3) sont plus délicates.

Analyse des questions les plus faciles. Les questions les mieux réussies, dans l'ordre décroissant de réussite sont : problème B question (1) (85% de réussite), problème A questions (1) et (5)(a) (64% et 54% de réussite), problème B questions (2) (3) (54% et 52% de réussite). On peut en déduire que la plupart des candidats maîtrisent les notions les plus basiques du programme, ce qui est tout à fait satisfaisant.

À l'avenir, nous continuerons autant que possible de proposer des questions élémentaires sur les trois parties du programme et nous encourageons tous les candidats à lire l'énoncé avant de commencer à rédiger leur copies de manière à identifier dès le début de l'épreuve les questions les plus faciles sur lesquelles une rédaction impeccable leur rapportera de nombreux points.

Conclusion. Un travail minimal en mathématiques nous semble toujours très fructueux et nous encourageons les futurs candidats à travailler les notions les plus élémentaires et les calculs de base en profondeur. Ce travail doit leur permettre de reconnaître et de rédiger proprement les questions les plus simples qui ne font appel qu'à une connaissance de base du cours. Comme nous l'avons vu, ce travail permet aisément d'obtenir la note 10/20, ce qui peut éviter l'élimination aux candidats les moins à l'aise en mathématiques.

À l'inverse, il est très difficile, voire impossible de réussir sans cet investissement. Parmi les 62 admissibles à l'ÉNS Paris, seuls 7 ont obtenu une note inférieure ou égale à 13/20 et 47 ont eu au moins 15/20. La moyenne des admissibles à l'ÉNS Paris se situe à 16.1/20. La moyenne des admis à l'ÉNS de Paris se situe à 15.2/20.

2 Conseils aux candidats

Comme chaque année, nous profitons du rapport pour rappeler aux futurs candidats quelques conseils de base pour bien réussir l'épreuve de mathématiques.

Honnêteté. Il est très appréciable de voir les candidats aborder de nombreuses questions. Toutefois, nous rappelons qu'il est immédiat de repérer les copies qui tentent de répondre à une question de façon malhonnête ou de grappiller des points. Ces tentatives de bluff sont particulièrement irritantes et pénalisent ensuite les candidats tout au long de la copie, toute ambiguïté étant ensuite systématiquement interprétée comme une erreur.

Les candidats sont également invités à s'interroger sur la cohérence des résultats annoncés sur leur copie, comme par exemple l'obtention d'une limite égale à 0 à la question A-(1)(c) où d'un a_n négatif à la question C-(8)(b). Repérer une incohérence permet généralement aux candidats de corriger une erreur. A minima, ceux-ci ont intérêt à la signaler s'ils n'ont pu la corriger. Nous n'hésitons jamais à valoriser une réponse correcte, même très partielle, du moment que ses limites sont clairement identifiées. Au contraire, toute tentative de bluff, réelle ou supposée, fera systématiquement perdre au candidat les points de la question et des points d'honnêteté sur la copie. Ainsi nous avons pu lire toutes sortes d'inégalités fausses afin de prouver l'hérédité dans un raisonnement par récurrence souvent proposé à la question A-(4)(a).

Comme les années précédentes, nous avons récompensé les candidats faisant preuve de recul et d'honnêteté, en ajoutant au barème initial quelques points (autant que pour une question de difficulté moyenne) attribués uniquement en fonction de l'honnêteté et l'absence d'incohérences manifestes au sein de la copie. Ceci nous permet de mettre en avant les copies s'attachant à démontrer rigoureusement tout résultat présenté, même les plus modestes, par rapport aux copies racontant longuement des raisonnements obscurs dans l'espoir que nous cherchions le bon argument au milieu d'une longue liste sans intérêt.

Rédaction. L'épreuve de mathématiques exige rigueur et précision, il est parfaitement inutile et même néfaste de tenter de répondre à un grand nombre de questions si on ne soigne pas la rédaction. Quasiment toutes les questions peuvent être traitées en utilisant un ou parfois deux arguments très courts. La rédaction des questions élémentaires, de plus en plus nombreuses, joue un rôle important dans la notation, qui favorise largement les candidats répondant de manière impeccable à quelques questions par rapport à ceux essayant à tout prix de traiter toutes les questions sans jamais le faire proprement.

Ainsi, la multiplication des questions élémentaires doit inviter les candidats les plus modestes à accorder davantage de temps à ces questions de base qu'aux questions plus avancées des exercices. Il est toujours beaucoup plus difficile de récupérer des points sur les questions plus délicates qui exigent souvent d'avoir bien compris les notations du sujet et les questions précédentes.

Nous détaillons les principales attentes du jury quant à la rédaction de l'épreuve écrite et indiquons des erreurs courantes qu'il convient d'éviter. Une réponse bien rédigée doit montrer *sans ambiguïté* au jury que le candidat a trouvé une démonstration *complète*, *concise*, *sans argument erroné*, n'utilisant *que des résultats au programme* et *répondant bien à la question posée*.

(1) Ambiguïté et/ou démonstration incomplète : un candidat perdra systématiquement des points en laissant floue une partie de son raisonnement, ne serait-ce que parce qu'il se trouve toujours une dizaine d'autres copies levant la même ambiguïté avec un argument totalement faux. Il est très important en mathématiques de savoir ce que l'on fait, quitte à ne proposer qu'une réponse partielle.

    Il est indispensable de mentionner tous les arguments dans la résolution d'une question de base. Par exemple, à la question A-(5)-(b), il fallait invoquer l'indépendence des choix.

    De plus, il faut *toujours* mentionner un résultat prouvé dans une question précédente lorsqu'on l'utilise.

Nous avons pénalisé les copies tentant manifestement de grappiller des points en écrivant des assertions non justifiées et souvent fausses dans les questions plus difficiles.

(2) Démonstration concise : la plupart des questions de l'épreuve peuvent se résoudre à l'aide d'un argument très court. Nous valorisons toujours les candidats capables de mettre cet argument en évidence par rapport à ceux qui le délayent dans une suite de calculs ou de phrases sans intérêt. Ainsi de longues résolutions graphiques de la question (2) du problème A sans mentionner la décroissance de la fonction $t \mapsto 1/t$ ont été pénalisées.

(3) Arguments erronés : pire, énoncer une affirmation manifestement fausse ne peut pas servir le candidat, mais seulement jeter la suspicion sur tout ce qu'il écrit. Par exemple pour résoudre la question 4(b) du problème B, de nombreux candidats ont "oublié" que les inégalités strictes devenaient des inégalités larges à la limite.

(4) Rédaction et sténographie : nous avons apprécié la disparition quasi-complète de signes cabalistiques ou notations non-standard, nous encourageons vivement les futurs candidats à poursuivre cet effort.

(5) Orthographe, erreurs de calculs : même en mathématiques, il est nécessaire de relire sa copie avant de la rendre de manière à éviter d'y laisser des fautes d'orthographe ou de calcul grossières.

(6) Nous insistons à nouveau sur la présentation de la copie et la lisibilité de l'écriture. Nous avons cette année encore eu beaucoup de mal à déchiffrer certaines copies et probablement pénalisé des candidats croyant sans doute gagner un peu de temps en les négligeant.

Forme. Il est souhaitable de présenter sa copie le plus clairement possible. En particulier, le jury apprécie que les réponses à un même exercice soient présentées dans l'ordre, et qu'en tous cas les éléments de réponse à une même question soient rassemblés en un seul endroit, sauf mention explicite du contraire. Nous sommes heureux de constater les efforts de la plupart des copies qui les rendent agréables à lire.

3 Erreurs les plus fréquentes

Nous signalons ici quelques erreurs ou confusions commises dans plusieurs copies :

- Aux questions (1)(c) et (3)(a) du Problème A, nous avons trop souvent lu que des fonctions ou des suites étaient équivalentes à 0, et vu trop de candidats sommer des équivalents. Pour résoudre ces questions proprement il s'agissait d'écrire un développement limité à un ordre suffisant.
- Les candidats s'étant servis d'un critère de comparaison de séries pour résoudre la question (3)(b) ont souvent oublié de préciser qu'il s'appliquait à des séries de signes constants.
- Nous rappelons que l'inégalité de Markov, que l'ont pouvait utiliser aux questions (5)(e) du problème A et (8)(c) du problème C s'applique à des variables aléatoires positives.

- En algèbre linéaire, un nombre non négligeable de candidats confondent inversibilité et diagonalisabilité. Nous avons ainsi souvent lu qu'une matrice de taille 2 était diagonalisable car $ad - bc \neq 0$. Ceci est peut-être dû au fait qu'on peut étudier l'inversibilité de $A - \lambda I$ pour déterminer les valeurs propres de A, mais il s'agit d'une erreur grave !
- Comme l'année dernière, plusieurs candidats ont parlé du « rang » d'une matrice au lieu de sa taille, et le théorème du rang pour les matrices a souvent été écrit avec $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi à la question (2) du problème B les candidats ne se formalisent pas de trouver un noyau de dimension 3 pour une matrice de taille 2.
- Pour étudier l'inversibilité d'une matrice, certaines candidats ont calculé le spectre de celle-ci pour vérifier que 0 ne s'y trouvait pas, ce qui les a conduit à perdre beaucoup de temps sur la question (4) du problème B, qui pouvait être résolue de manière beaucoup plus efficace en regardant simplement le rang de la matrice ou son noyau.
- Pour résoudre la question (7) du problème B certains candidats ont invoqué le fait que si $\text{Ker }(u) \bigoplus \text{Ker }(u - id) = \text{Ker }(u) \bigoplus \text{Im }(u)$ alors nécessairement $\text{Ker }(u - id) = \text{Im }(u)$. Cet argument est faux car tout sous-espace vectoriel de dimension $< n$ admet une infinité de supplémentaires.
- Le critère de comparaison pour la convergence des intégrales pose de nombreuses difficultés. Le signe de la fonction considérée n'est quasiment jamais mentionné, et dans le cas d'une comparaison avec $\frac{1}{x^\alpha}$, de nombreux candidats confondent le critère en 0 et en ∞.
- L'argument "par croissances comparées" pour justifier une limite a été souvent utilisé à tors à la question (1) du problème C
- Le théorème fondamental de l'intégration (le fait que $\int_a^x f(t)dt$ soit la primitive de f qui s'annule en a) a un énoncé original pour certains candidats, qui le voient comme une formule pour calculer plus généralement $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$.
- Nous avons souvent lu à la question (8) que la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue à support dans $\mathbb{R}^+$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[0, 1[$. Nous rappelons au candidat qu'une telle fonction n'est pas nécessairement strictement croissante. Le théorème des valeurs intermédiaires était suffisant pour résoudre la question (8)(a) du problème C.
- Les candidats peuvent parfois être amenés à démontrer des résultats qu'ils auront vu pendant l'année afin de vérifier leur assimilation du cours. Dans ce cas, une justification de type « c'est un résultat du cours » est à proscrire. De nombreux candidats ont également essayé de refaire un raisonnement par analyse et synthèse pour la question (6) du problème B plutôt que de se laisser guider par l'énoncé.

4 Commentaires détaillés sur chaque exercice

Comme les années précédentes, en vue de préciser notre analyse des principales faiblesses observées dans les copies, nous indiquons pour chaque question le nombre de copies ayant obtenu au moins 75% des points, le nombre de copies l'ayant abordée (sur un total de 736 copies) ainsi que la réussite (pourcentage du nombre total de points obtenus par les 736 copies par rapport au nombre total de points possible). Par ailleurs, chaque question était notée sur 4 points, avec un coefficient multiplicatif indiqué ci-dessous.

Problème A. Les candidats ont obtenu en moyenne 37% de leurs points sur ce problème.

(1) (a) [436 copies $\geqslant$ 75% sur 708 copies, réussite de 64%, coefficient 2]
Cette question a plutôt bien réussie, mis à part quelques erreurs de calcul et de dérivation.

(b) [84 copies $\geqslant$ 75% sur 595 copies, réussite de 29%, coefficient 0.5]
Pour obtenir tous les points, il fallait placer quelques points particuliers sur la courbe, voire une tangente.

(c) [54 copies $\geqslant$ 75% sur 434 copies, réussite de 10%, coefficient 2]
Cette question a posé des difficultés. On pouvait soit écrire $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+1/x}$ puis faire un développement limité de $\frac{1}{1+u}$ et de $\ln(1+u)$ à l'ordre 2 quand $u \to 0$, soit faire juste un dévéloppement limité de $\ln(1+u)$ à l'ordre 2 quand $u \to 0$ et remarquer que $x^2(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}) \to -\frac{1}{2}$.

(2) [289 copies $\geqslant$ 75% sur 543 copies, réussite de 43%, coefficient 1.5]
Cette question a été bien réussie par les candidats qui ont utilisé la positivité de l'intégrale.

(3) (a) [42 copies $\geqslant$ 75% sur 542 copies, réussite de 17%, coefficient 1]
Il s'agissait d'utiliser la question 1(c), mais certains candidats ont réussi cette question sans elle. D'autres candidats ayant réussi la question 1(c) n'ont cependant pas réussi la question (3)(a).

(b) [63 copies $\geqslant$ 75% sur 370 copies, réussite de 12%, coefficient 1.5]
La plupart des candidats qui ont traité cette question ont démontré que la suite (u_n) était décroissante (ce qui était aussi utile à la question 4(a)) et minorée.

(4) (a) [126 copies $\geqslant$ 75% sur 345 copies, réussite de 20%, coefficient 1]
Cette question a été plutôt bien traitée pas les copies qui l'ont abordée.

(b) [7 copies $\geqslant$ 75% sur 177 copies, réussite de 1%, coefficient 2.5]
Question très difficile (l'inégalité $\gamma > 0$ n'a été démontrée dans aucune copie).

(5) (a) [407 copies $\geqslant$ 75% sur 502 copies, réussite de 54%, coefficient 0.5]
Question essentiellement résolue par les copies ayant abordé la question 5.

(b) [76 copies $\geqslant$ 75% sur 251 copies, réussite de 21%, coefficient 1]
De nombreuses copies ont oublié d'invoquer l'indépendence.

(c) [78 copies $\geqslant$ 75% sur 230 copies, réussite de 15%, coefficient 1]
Question généralement résolue par les candidats ayant résolu la question précédente.

(d) [73 copies $\geqslant$ 75% sur 193 copies, réussite de 14%, coefficient 1]
Question généralement résolue par les candidats ayant résolu la question précédente. Il s'agissait d'utiliser la linéarité de l'espérance.

(e) [39 copies $\geqslant 75\%$ sur 65 copies, réussite de 5%, coefficient 1.5]
Cette question, plus originale, reposait sur l'utilisation de l'inégalité de Markov.

(f) [12 copies $\geqslant 75\%$ sur 89 copies, réussite de 4%, coefficient 1]
Des erreurs de calcul étaient contenues dans la plupart des copies ayant abordé cette question.

(6) [34 copies $\geqslant 75\%$ sur 90 copies, réussite de 5%, coefficient 1]
Cette question, indépendante de la question 5, a été peu abordée.

Problème B. Les candidats ont obtenu en moyenne 38% de leurs points sur ce problème.

(1) [646 copies $\geqslant 75\%$ sur 732 copies, réussite de 85%, coefficient 1]
Les copies qui n'ont pas présenté de calcul intermédiaire ont perdu des points.

(2) [221 copies $\geqslant 75\%$ sur 640 copies, réussite de 54%, coefficient 2]
Cette question pouvait être résolue rapidement grâce au théorème du rang. Les candidats qui ont déterminé des bases du noyau de A et de l'image de A ont perdu du temps.

(3) [191 copies $\geqslant 75\%$ sur 595 copies, réussite de 29%, coefficient 1.5]
Nous avons trop souvent lu qu'une matrice de taille 2 était diagonalisable car $ad - bc \neq 0$.

(4) [270 copies $\geqslant 75\%$ sur 658 copies, réussite de 52%, coefficient 1]
Cette question a donné lieu à de nombreuses erreurs de calcul.

(5) [333 copies $\geqslant 75\%$ sur 539 copies, réussite de 44%, coefficient 1.5]
Nous avons apprécié les copies justifiant que $\widehat{u}$ est linéaire.

(6) [105 copies $\geqslant 75\%$ sur 380 copies, réussite de 23%, coefficient 1.5]
De nombreuses copies ont voulu procéder à une analyse-synthèse.

(7) [134 copies $\geqslant 75\%$ sur 322 copies, réussite de 23%, coefficient 1.5]
Il s'agissait de raisonner par double inclusions, ce que de nombreuses copies ont su faire.

(8) [6 copies $\geqslant 75\%$ sur 78 copies, réussite de 1%, coefficient 1.5]
Cette question plus originale a été moins abordée et réussie. La décomposition de la question 6 permettait par exemple de montrer que les sous-espaces propres de $u + \sqrt{2018} \cdot \mathrm{Id}$ sont en somme directe.

(9) [16 copies $\geqslant 75\%$ sur 149 copies, réussite de 3%, coefficient 1.5]
Il s'agissait de montrer que $\operatorname{Ker}(p - q) = \{0\}$ en utilisant d'abord que $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \{0\}$ puis que $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q = \{0\}$, ce que les très bonnes copies ont su faire.

(10) [12 copies $\geqslant 75\%$ sur 129 copies, réussite de 3%, coefficient 0.5]
Cette question a été résolue dans les toutes meilleures copies.

(11) [77 copies $\geqslant 75\%$ sur 106 copies, réussite de 11%, coefficient 0.5]
Cette question simple, mais en fin de problème, a été généralement bien réussie par les candidats qui l'ont abordée.

(12) [8 copies $\geqslant 75\%$ sur 29 copies, réussite de 1%, coefficient 2]
Les meilleures copies ont pensé à utiliser la question 10 avec $\hat{p}$ et $\hat{q}$ à la place de p et q.

(13) [40 copies $\geqslant$ 75% sur 58 copies, réussite de 6%, coefficient 1]
Cette question a été essentiellement résolue par les copies l'ayant abordée.

(14) [45 copies $\geqslant$ 75% sur 63 copies, réussite de 7%, coefficient 0.5]
Question généralement résolue par les candidats ayant résolu la question précédente.

(15) [5 copies $\geqslant$ 75% sur 21 copies, réussite de 1%, coefficient 1.5]
Question plus délicate sans indication, moins résolue.

(16) [1 copie $\geqslant$ 75% sur 24 copies, réussite de 0%, coefficient 1.5]
Cette dernière question, qui nécessitait du recul sur les question précédentes, a été résolue dans une seule copie.

Problème C. Les candidats ont obtenu en moyenne 25% de leurs points sur ce problème.

(1) [340 copies $\geqslant$ 75% sur 572 copies, réussite de 47%, coefficient 1]
Le jury a été vigilant sur la précision de la rédaction.

(2) [346 copies $\geqslant$ 75% sur 500 copies, réussite de 44%, coefficient 1]
Le jury a été vigilant sur la précision de la rédaction.

(3) [88 copies $\geqslant$ 75% sur 363 copies, réussite de 11%, coefficient 1.5]
Il s'agissait d'exhiber un contre-exemple.

(4) [227 copies $\geqslant$ 75% sur 342 copies, réussite de 30%, coefficient 1]
Cette question a été plutôt bien réussie parmi les copies qui l'ont abordée.

(5) (a) [31 copies $\geqslant$ 75% sur 259 copies, réussite de 11%, coefficient 1.5]
De nombreuses copies ont oublié de déterminer la valeur de a.

(b) [2 copies $\geqslant$ 75% sur 130 copies, réussite de 2%, coefficient 1]
Cette question, posée de manière ouverte, était délicate.

(6) (a) [49 copies $\geqslant$ 75% sur 119 copies, réussite de 7%, coefficient 1.5]
Cette question a été résolue par environ la moitié des copies l'ayant abordée en suivant l'indication (qui comportait une légère coquille : il fallait lire « pour tout $u \geqslant M$ » au lieu de « pour tout $x \geqslant M$ », ce que les candidats ont corrigé par eux-mêmes).

(b) [6 copies $\geqslant$ 75% sur 74 copies, réussite de 1%, coefficient 2]
Pour résoudre cette question difficile, il s'agissait d'utiliser également l'indication de la question précédente.

(c) [78 copies $\geqslant$ 75% sur 109 copies, réussite de 11%, coefficient 1]
La plupart des copies ayant abordé cette question ont pu la résoudre en admettant la question précédente.

(7) [39 copies $\geqslant$ 75% sur 395 copies, réussite de 17%, coefficient 1]
Cette question a été la source de nombreuses imprécisions. Par exemple, de nombreuses copies ont simplement écrit $\mathbb{P}(X \geqslant u) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant u)$.

(8) (a) [52 copies $\geqslant$ 75% sur 270 copies, réussite de 12%, coefficient 1]
Il fallait faire attention au fait que $\overline{F}$ était décroissante, mais pas forcément strictement croissante.

(b) [169 copies $\geqslant$ 75% sur 295 copies, réussite de 25%, coefficient 1]
Question globalement bien réussie, avec cependant quelques erreurs de signe.

(c) [43 copies $\geqslant$ 75% sur 158 copies, réussite de 6%, coefficient 1]
Il s'agissait d'utiliser l'inégalité de Markov.

(d) [27 copies $\geqslant$ 75% sur 156 copies, réussite de 10%, coefficient 1]
Le jury a été vigilant sur la précision de la rédaction.

(9) [23 copies $\geqslant$ 75% sur 69 copies, réussite de 3%, coefficient 1.5]
Rien à signaler sur cette question.

(10) [3 copies $\geqslant$ 75% sur 41 copies, réussite de 1%, coefficient 2]
Peu de réussite sur cette dernière question.