Mathématiques
Planche N°A08

Ce sujet est composé de deux exercices.
Le candidat doit les traiter ***tous les deux*** *puis les exposer dans l'ordre de son choix.*

Exercice 1

On considère un entier naturel non nul n et la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par, pour tout $x \geqslant 0$,

$$F_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x}$$

1. Montrer que la fonction F_n réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $]0,1]$.

   On considère X une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1]$ qui suit la loi uniforme sur cet intervalle.
   On pose $Y_n = F_n^{-1}(X)$.

2. (a) Déterminer la fonction de répartition G_n de Y_n sur $\mathbb{R}^+$.

   (b) En déduire que Y_n est une variable à densité et déterminer une densité de Y_n.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \dfrac{Y_n}{\sqrt{n}}$.

   (a) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\ln\left(\mathbb{P}(Z_n > x)\right) = n \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) - x\sqrt{n}$.

   (b) En déduire que $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité Z dont on précisera une densité.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, les réels $x_1, \ldots, x_n$ sont fixés, non tous égaux et on note $f_{m,\sigma}$ la densité de probabilité usuelle de la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

On pose $\mu_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$, $s_n^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2$ et on définit la fonction L, appelée fonction de log-vraisemblance, sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ par,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[, \quad L(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \ln(f_{x,y}(x_i))$$

1. (a) Établir que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu_n)^2 = s_n^2 - \mu_n^2$. En déduire que $s_n^2 - \mu_n^2 > 0$.

   (b) Montrer que L est de classe C^2 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ et que L admet un unique point critique (x^*, y^*) où : $\begin{cases} x^* = \mu_n \\ (y^*)^2 = s_n^2 - \mu_n^2 \end{cases}$

2. Écrire la matrice hessienne $\nabla^2(L)$ de L au point (x^*, y^*). En déduire qu'au point (x^*, y^*), la fonction L admet un maximum local.

3. (a) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$,

$$L(x^*, y^*) - L(x,y) = n \ln\left(\frac{y}{y^*}\right) + \frac{n}{2}\left(\left(\frac{y^*}{y}\right)^2 - 1\right) + \frac{n}{2y^2}(x - x^*)^2$$

   (b) Etudier la fonction φ définie sur $]0,+\infty[$ par, $\forall t > 0$, $\varphi(t) = \ln(t) + \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{2}$.

   (c) En déduire que L possède en (x^*, y^*) un maximum global sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Mathématiques
Planche N°15

Ce sujet est composé de deux exercices.
Le candidat doit les traiter ***tous les deux*** *puis les exposer dans l'ordre de son choix.*

Exercice 1

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel.
On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
On note g l'endomorphisme de E définit par $g(M) = {}^tM$.
On note $\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{L}(E)\ ,\ f \circ g = g \circ f\}$ et on admet que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{S \in E\ ,\ {}^tS = S\}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{S \in E\ ,\ {}^tA = -A\}$.

1. Établir que $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \bigoplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ appartient $\mathcal{C}$ si, et seulement si, les deux sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont stables par f (c'est-à-dire $f(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $f(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$).
3. Déterminer les dimensions des espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{L}(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.
4. En déduire la dimension de $\mathcal{C}$.

Exercice 2

Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}\big)$.

On considère une suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*\ , \quad \mathrm{P}(R_k = -1) = \mathrm{P}(R_k = 1) = \frac{1}{2}$$

et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} R_k$ et $V_n = \prod\limits_{k=1}^{n} R_k$.

1. (a) Écrire une fonction **simulV()** en python d'argument n qui simule une réalisation de V_n.
   (b) Démontrer que V_n admet une espérance et calculer sa valeur.
   (c) En déduire la loi de V_n.
2. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}\big[\cos(S_n\, t)\big] = (\cos t)^n$$