

# Oral de mathématiques 2

## Rapport de jury

Edouard Maurel-Ségala, Mustapha Touahir

Session de juin 2022

### 1 Dérroulement de l'épreuve

L'oral de mathématiques 2 est commun aux concours d'entrée à l'ENS de Paris-Saclay et à l'ENSAE en filière économie et sciences sociales. Pour la session 2022, il se compose de :

- 30 minutes de préparation de deux exercices, l'un relatif au programme d'analyse, l'autre au programme de probabilités. En fin de document, le lecteur trouvera des exemples de planches proposées aux candidats ;
- 30 minutes d'oral où le candidat traite, dans l'ordre de son choix, chacun des deux exercices ;
- dans l'hypothèse où, à l'issue des 20 premières minutes de l'oral, le candidat traite toujours le même exercice, ce dernier est invité par l'examineur à passer au second exercice ;
- pendant l'épreuve, le candidat écrit au tableau les éléments de réponse aux questions posées ; il efface le tableau à l'issue de sa prestation ;
- afin d'optimiser l'harmonisation des notes, le jury propose un même sujet à plusieurs candidats ; l'objectif consiste notamment à prendre en compte, dans la notation, la difficulté particulière qu'a pu présenter telle question ou tel exercice ;
- une coordination est assurée avec le jury de l'épreuve de mathématiques 1 qui couvre également la partie probabilités du programme et qui concerne les seuls candidats à l'Ensaë : les exercices de probabilités de l'épreuve mathématiques 2 sont tous différents de ceux posés dans l'épreuve de mathématiques 1.

## 2 Résultats

La moyenne des notes obtenues est de 12,4, avec un écart-type de 3,8. Les notes s'échelonnent de 3 à 20.

## 3 Observations d'ordre général

Comme les années précédentes, le jury tient à saluer les qualités d'expression des candidats, leur attitude irréprochable et leur courtoisie tout au long de l'épreuve. Les examinateurs ont à cœur que l'oral soit l'occasion d'un échange bienveillant et cet état d'esprit a bien été perçu. En particulier, les questions que posent les examinateurs ne visent jamais à piéger les candidats ; il s'agit simplement d'estimer leur niveau avec la plus grande justesse possible. Pour ce faire, les examinateurs s'autorisent à interrompre les candidats et à poser quelques questions subsidiaires qu'ils jugent utiles pour affiner l'évaluation et qui ne figuraient pas explicitement dans l'énoncé. Les candidats peuvent ainsi être amenés à citer une proposition ou un théorème de cours, à préciser les conditions d'utilisation d'une propriété, à rappeler une définition ou encore à exhiber un exemple ou un contre-exemple.

Le jury rappelle qu'il n'est pas nécessaire de traiter l'intégralité du sujet, ni pendant la préparation ni pendant l'épreuve orale, pour obtenir une très bonne note. De même, le candidat peut présenter des raisonnements qui, selon lui, ont abouti à une impasse lors de la préparation des exercices : il arrive en effet qu'en écrivant de tels raisonnements, les candidats trouvent eux-mêmes l'erreur à corriger ou le bon argument à utiliser. Le jury apprécie particulièrement que les candidats se saisissent des indications données en séance pour avancer dans l'exercice. De même, la capacité à adopter un regard critique sur les résultats obtenus est jugée très positivement, a fortiori quand la démarche est à l'initiative du candidat : se rendre compte que le calcul d'une probabilité est erroné en constatant que la valeur n'est pas comprise entre 0 et 1, modifier les bornes d'une intégrale devenue négative à tort, ...

Par souci d'optimisation du temps, certains candidats traitent les premières questions des exercices de manière expéditive, rechignant à écrire ce qui leur semble être des évidences. Dans pareil cas, le jury peut demander aux candidats une rédaction rigoureuse, afin notamment de vérifier la justesse et la complétude du raisonnement. Ces demandes ne doivent pas être interprétées comme un signe de réprobation. Le jury est responsable de la progressivité suffisante de l'épreuve et s'en assure en permettant aux candidats, le cas échéant, d'emprunter des raccourcis de rédaction.

## 4 Observations relatives au contenu mathématique des oraux

Dans leur majorité, les candidats démontrent une bonne connaissance du cours et des principaux théorèmes ; ils parviennent ainsi, généralement, à présenter des raisonnements clairs et rigoureux. Le jury déplore toutefois certaines imprécisions et tient à rappeler les points de vigilance suivants :

- les candidats doivent être en mesure de tracer l'allure des courbes représentatives des fonctions usuelles ;
- les confusions entre séries géométriques et séries de Riemann ont été trop fréquentes ;
- le critère de Riemann a souvent été cité en des termes approximatifs ; certains candidats ont semblé troublés par son application au cas général avec  $\alpha$  réel quelconque ;
- le jury a constaté un manque d'aisance et d'automatisme dans la manipulation de calculs faisant intervenir des exponentielles d'exponentielles ou plus généralement des puissances de puissances ;
- certaines inégalités, simples à démontrer, ont été sources d'hésitations voire d'erreurs, notamment quand elles contenaient à la fois des inverses et des carrés ou racines carrées ;
- quelques résultats classiques doivent pouvoir être (re)trouvés facilement, par exemple les valeurs que peut prendre  $p(1-p)$ , surtout quand ce terme a vocation à se retrouver au dénominateur d'une fraction ;

Le jury tient à formuler les remarques suivantes, spécifiques respectivement aux exercices d'analyse et de probabilités.

En analyse :

- certaines définitions comme la limite d'une fonction en un point, ou sa dérivée, sont censées être parfaitement maîtrisées de la part des étudiants ; les écrire formellement, en utilisant les quantificateurs classiques, ne doit pas représenter de difficulté particulière ;
- le passage à la limite d'inégalités strictes a donné lieu à des hésitations fréquentes quant au caractère strict ou large de l'inégalité finale ;
- le calcul de la dérivée de certaines fonctions comme  $f : x \mapsto x^\alpha$  avec  $\alpha$  négatif a perturbé plusieurs candidats qui ont appliqué la formule de la dérivée d'une composée, sans succès (composée des fonctions inverses et puissance) ;

- les intégrations par parties ont donné lieu à des erreurs de signes trop nombreuses ;
- les majorations d'intégrales ont perturbé certains candidats qui ont cherché une majoration immédiate au lieu de majorer tout d'abord le terme sous l'intégrale et de procéder, par conséquent, en deux étapes ;
- les opérations sur les équivalents de suites ou de fonctions ont donné lieu à des imprécisions, certains candidats considérant à tort que la composition par une fonction continue permettait de conserver l'équivalence de deux fonctions.

En probabilités :

- il est attendu des candidats qu'ils sachent représenter l'allure d'une fonction de répartition, y compris dans le cas d'une variable aléatoire discrète. Or, certains candidats ont donné l'impression d'être perturbés à l'idée de tracer l'allure d'une telle courbe.
- toujours dans le cas de variables aléatoires discrètes, certains dénombrements étaient relativement complexes à effectuer. Le jury a alors veillé à fournir aux candidats les indications nécessaires, en séance, pour qu'ils progressent dans l'exercice. Comme dit précédemment, le jury a valorisé dans la notation les prestations de candidats qui ont su mobiliser ces indications à bon escient.
- la détermination de la loi d'un maximum, dans le cas d'un couple de deux variables aléatoires, a posé des difficultés aux candidats qui n'ont pas eu l'idée d'en calculer la fonction de répartition.
- de manière générale, les changements de variables aléatoires du type  $Y = \ln(X)$  ont suscité de nombreuses erreurs liées aux supports des variables.
- si la formule des probabilités totales est bien connue et bien utilisée, elle a donné lieu à quelques erreurs liées à des cas où la disjonction des événements n'était pas complètement vérifiée ;
- le jury aurait souhaité que les conditions d'existence d'une espérance pour une variable aléatoire soient mieux connues et mieux énoncées ;
- les propriétés de linéarité de l'espérance ont été utilisées, le cas échéant, avec justesse. En revanche, les calculs de variance ont généré des erreurs fréquentes et conduit certains étudiants à affirmer des inexactitudes du type  $V(X + 4) = V(X) + 4$ .

Lors des exercices de probabilités, le jury a par ailleurs observé certaines lacunes relevant du programme d'analyse avec lequel les frontières sont évidemment très poreuses :

- les points de non-dérivabilité d'une fonction de répartition doivent pouvoir être repérés graphiquement ;

- les arguments de parité, lorsqu'ils sont énoncés correctement, doivent permettre de simplifier le calcul d'intégrales de variables aléatoires dont la fonction de densité est paire sur  $R$  ;
- pour le calcul d'intégrales requérant un changement de variables, les candidats ont parfois été gênés par la manipulation des éléments différentiels, confondant par exemple  $\frac{dy}{dx}$  et  $\frac{dx}{dy}$ .

Outre les points saillants qu'il vient d'évoquer, le jury recommande de lire les rapports des années précédentes, disponibles en ligne également, et qui, tout en étant cohérent avec les remarques formulées ici, en constituent un complément utile pour une préparation optimale de l'épreuve orale.

Enfin, le jury adresse ses vives félicitations aux quelques candidats dont la prestation a été de grande qualité, témoignant d'une connaissance précise des notions au programme, d'une pratique régulière des mathématiques, d'un goût prononcé pour la matière, d'un recul sur les concepts utilisés et sur les résultats obtenus. Ces prestations remarquables, fruit d'une préparation de qualité et d'un travail régulier cours des deux ou trois années de classes préparatoires, répondent aux exigences du concours d'entrée à l'ENSAE et à l'ENS de Paris-Saclay en filière économie et sciences sociales.