



Planche 10

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

Soit $f : [0, \infty[\rightarrow]0, 1]$ une fonction deux fois dérivable et telle que

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha f(x) \leq f''(x).$$

- (a) Montrer que f' est croissante. En déduire que $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ existe et calculer sa valeur.
(b) Montrer que f est décroissante et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- (a) Soit $g(x) = \alpha f^2(x) - (f'(x))^2$. Montrer que g est croissante et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
(b) En posant $f(x) = h(x) \exp(-\sqrt{\alpha}x)$, montrer que pour tout $x \in [0, \infty[$:

$$f(x) \leq f(0) \exp(-\sqrt{\alpha}x).$$

Exercice 2

On note $[x]$ la partie entière d'un réel x , c'est-à-dire l'unique entier n tel que $n \leq x < n + 1$. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = [X]$ et $Z = X - Y$.

- Déterminer la loi de Y . Calculer son espérance et sa variance (on remarquera que $Y + 1$ suit une loi classique).
- Montrer que

$$\forall x \in [0, 1[, \quad P(Z \leq x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}$$

En déduire la densité de Z .

- Calculer l'espérance de Z .



ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

Planche 19

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)$?

Exercice 2

Soit $a > 0$. On considère une variable aléatoire X de loi de Cauchy de paramètre a , i.e. de densité sur \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}.$$

1. Justifier que f est bien une fonction de densité et calculer la fonction de répartition de cette variable aléatoire.
2. Que dire de l'espérance de X ?
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{sign}(x) \frac{\pi}{2}$$

(on pourra par exemple faire une étude de fonction).

4. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = 1/X$. Calculer la fonction de répartition de Y . Quelle loi reconnaissez-vous ?