ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

Planche 5

Vous présenterez ces <u>deux</u> exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+1} = (u_n - 1)^2\,.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^n} \ln\left(1 - \frac{1}{u_n}\right)\,.$$

   En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\alpha \geq 0$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout entier $p \geq n$, on a

   $$v_p - v_n = \sum_{k=n}^{p-1} \frac{1}{2^k} \ln\left(1 - \frac{1}{u_k}\right)\,,$$

   puis que $\alpha - v_n \geq \frac{1}{2^{n-1}} \ln\left(1 - \frac{1}{u_n}\right)$.

   (c) En déduire que $\alpha \neq 0$, puis que $\frac{u_n}{\exp(2^n\alpha)} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

Exercice 2

Soit $t > 0$ un réel et T une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre t. On dispose de deux ampoules, numérotées 1 et 2, initialement éteintes, et l'on effectue l'opération suivante de façon indépendante un nombre T de fois :

— on choisit une des deux ampoules uniformément ;
— si elle est éteinte, on l'allume, et si elle est allumée, on l'éteint.

La variable aléatoire T et les choix d'ampoules sont supposés indépendants. Pour $j \in \{1, 2\}$, on note N_j le nombre de fois où l'ampoule j a été choisie.

1. Quelle est la loi du couple (N_1, N_2) ?
2. Déterminer la probabilité qu'à la fin de cette expéreience aléatoire, les deux ampoules soient allumées.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

Planche 27

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n :]0;\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction qui à $x \in]0,+\infty[$ associe $f_n(x) = (\ln(x))^n$. Soit $F_n :]0;\infty[\to \mathbb{R}$ la primitive de f_n qui s'annule en 1.

1. Calculer F_1. Calculer $\lim_{x\to 0+} F_1(x)$
2. En s'inspirant du calcul de F_1 trouver une relation entre F_n et F_{n-1}.
3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, calculer $\lim_{x\to 0+} F_n(x)$.

Exercice 2

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

1. Soit T la variable aléatoire égale au plus petit entier $n \geqslant 2$ tel que $X_{n-1} = 0$ et $X_n = 1$. Par convention, on pose $T = 0$ s'il n'existe pas de tel entier. Montrer que T a la même loi que $X + Y$ où X et Y sont deux variables géométriques indépendantes.
2. Quelle est l'espérance et la variance de T ?
3. Donner la loi de T.
4. On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire S égale au plus petit entier $n \geqslant 2$ tel que $X_{n-1} = 0$ et $X_n = 0$. Par convention, on pose $S = 0$ s'il n'existe pas de tel entier. On pose $u_n = \mathbb{P}(S = n)$. Calculer u_2 et u_3.
5. En considérant le résultat des deux premières pièces, montrer que pour $n \geqslant 3$:
$$u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{4}u_{n-2}.$$
6. Calculer $\mathbb{E}[S]$.