Les candidats présenteront les deux exercices dans l'ordre de leur choix. Il est nécessaire d'avoir abordé les deux pendant la préparation, sans forcément les terminer.

Exercice 1.

Dans tout l'exercice on admettra qu'une famille de polynômes non nuls et de degrés tous différents est une famille libre.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On regarde l'application $f : E \to E$ définie par $f(P) = P(X) - P(X-1)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. De quel degré est le polynôme $f(X^p)$?
3. Déterminer le noyau et l'image de f.
4. Soit P est un polynôme de degré n. Notons $V = \mathrm{Vect}(P(X), P(X+1), \ldots, P(X+n))$
   (a) Justifier que la famille $(P(X-1), P(X), \ldots, P(X+n))$ est liée et montrer que $f(P) \in V$.
   (b) Montrer que $(f(P), f^2(P), \ldots, f^n(P)) \subset V$.
   (c) Montrer alors que $(P(X), P(X+1), \ldots, P(X+n))$ est une base de E.
5. Trouver un polynôme P de la forme $\frac{1}{c}(X^3 + aX^2 + bX)$ tel que $f(P) = X^2$.
   Retrouver alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 2.

Soit $n \geq 1$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes suivant une loi normale centrée réduite. Soit $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$. La loi de Y est appelée la loi du χ^2 à n degrés de liberté.

1. Calculer $\mathbb{E}[Y]$.
2. Calculer $\mathrm{V}(Y)$.
3. Calculer la fonction de répartition de Y quand $n = 1$, en déduire sa densité.
   Indication : On pourra procéder à un changement de variable.

Les candidats présenteront les deux exercices dans l'ordre de leur choix. Il est nécessaire d'avoir abordé les deux pendant la préparation, sans forcément les terminer.

Exercice 1.

Soient n un entier naturel non nul, E un espace vectoriel de dimension finie égale à n, f et g deux endomorphismes de E qui commutent, c'est-à-dire vérifient $f \circ g = g \circ f$. On suppose que f possède n valeurs propres distinctes.

1. Quelle est la dimension des sous-espaces propres de l'endomorphisme f ?
2. Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f et la matrice de g sont diagonales.
4. Le résultat de la question 3 reste-t-il vrai si l'on remplace l'hypothèse "f possède n valeurs propres distinctes" par l'hypothèse "f est diagonalisable" ?

Exercice 2.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $M = \min(X, Y)$. Préciser son espérance.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $T = |X - Y|$.
3. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}\left(M = i \text{ et } T = j\right)$.
   Indication : on pourra distinguer les cas $j = 0$ et $j \geq 1$.
   Les variables M et T sont-elles indépendantes ?