Mathématiques
Planche N°10

Exercice 1

1. On considère une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de réels strictement positifs et on définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par :

$$u_0 = a_0 \text{ et, pour } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$$

   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie.

   (b) Donner une condition nécessaire simple, portant sur la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$, pour que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

   (c) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a : $u_n^2 = a_0^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^2}{u_k^2} + 2\sum_{k=0}^{n-1} a_k$.

   (d) En déduire une condition, portant sur la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$, équivalente à la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

2. On se place dans la situation où $a_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = n$.
   Déterminer un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers l'infini.

3. On s'intéresse au cas où $a_n = r^n$ avec $r \in]0, 1[$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\ln X$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Déterminer une densité f de X.

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ le moment d'ordre n, $\mathbb{E}(X^n)$ de X existe et le calculer.
   On pourra poser $u = \ln(x)$.

3. Soit $\alpha \in [-1, 1]$ et f_α la fonction définie par :

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} f(x)\,(1 + \alpha \sin(2\pi \ln x)) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrer que, f_α est la densité d'une variable aléatoire X_α telle que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{E}(X_\alpha^n) = \mathbb{E}(X^n)$$

   Que peut-on en déduire ?

Mathématiques
Planche N°A05

Ce sujet est composé de deux exercices.
Le candidat doit les traiter ***tous les deux*** *puis les exposer dans l'ordre de son choix.*

Exercice 1

On considère une suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ de variables indépendantes positives sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E(X_k^2) = 1$. On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

1. (a) Démontrer que $E(X_k)$ existe et vérifie $E(X_k) \leqslant 1$ puis que $E(Y_n)$ existe et vérifie $E(Y_n) \leqslant 1$.
   (b) Montrer que la suite de terme général $E(Y_n)$ est convergente.
2. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} E(Y_n) = 0$. Montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2 avec $E(Y^2) \neq 0$.
   (a) Justifier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité $E((X + xY)^2) = E(X^2) + 2xE(XY) + x^2E(Y^2)$.
   (b) A l'aide du signe du trinôme $E((X + xY)^2)$, montrer que $(2E(XY))^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \leqslant 0$ d'où $|E(XY)| \leqslant \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$.
4. On suppose que $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0.
   (a) Établir que pour tout $a > 0$, $Y_n \leqslant Y_n \mathbf{1}_{[Y_n \geqslant a]} + a$.
   (b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} E(Y_n) = 0$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'application u sur $\mathbb{R}_n[x]$ par,

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x], u(P)(x) = xP(x + 1) - (x - 1)P(x)$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. (a) Déterminer les valeurs propres de u, justifier que u est diagonalisable et préciser la dimension des sous-espaces propres de u.
   (b) Soit $E_1(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre 1.
   Montrer que $E_1(u) = \{P \in \mathbb{R}_n[x]/P(x + 1) = P(x)\}$ et que $E_1(u) = \mathbb{R}_0[x]$.
3. Soit P un polynôme tel que $u(P)(x) = (k + 1)P(x)$ où $k \in [|1, n|]$.
   (a) Montrer que pour tout $i \in [|0, k - 1|]$, $\quad -i$ est une racine de P.
   (b) On pose $T_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1}(x + i)$. En déduire qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $P(x) = T_k(x)Q(x)$.
   (c) Etablir que $Q(x + 1) = Q(x)$. En déduire que $P \in \text{Vect}(T_k(x))$. Conclure.