

Mathématiques
Planche N°A05

Ce sujet est composé de deux exercices.

*Le candidat doit les traiter **tous les deux** puis les exposer dans l'ordre de son choix.*

Exercice 1

On considère une suite $(X_k)_{k \geq 1}$ de variables indépendantes positives sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E(X_k^2) = 1$. On pose, pour tout $n \geq 1$, $Y_n = \prod_{k=1}^n X_k$.

1. (a) Démontrer que $E(X_k)$ existe et vérifie $E(X_k) \leq 1$ puis que $E(Y_n)$ existe et vérifie $E(Y_n) \leq 1$.
(b) Montrer que la suite de terme général $E(Y_n)$ est convergente.
2. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_n) = 0$. Montrer que $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2 avec $E(Y^2) \neq 0$.
(a) Justifier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité $E((X + xY)^2) = E(X^2) + 2xE(XY) + x^2E(Y^2)$.
(b) A l'aide du signe du trinôme $E((X + xY)^2)$, montrer que $(2E(XY))^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \leq 0$ d'où $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$.
4. On suppose que $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
(a) Établir que pour tout $a > 0$, $Y_n \leq Y_n \mathbf{1}_{[Y_n \geq a]} + a$.
(b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_n) = 0$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'application u sur $\mathbb{R}_n[x]$ par,

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x], u(P)(x) = xP(x+1) - (x-1)P(x)$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. (a) Déterminer les valeurs propres de u , justifier que u est diagonalisable et préciser la dimension des sous-espaces propres de u .
(b) Soit $E_1(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre 1.
Montrer que $E_1(u) = \{P \in \mathbb{R}_n[x] / P(x+1) = P(x)\}$ et que $E_1(u) = \mathbb{R}_0[x]$.
3. Soit P un polynôme tel que $u(P)(x) = (k+1)P(x)$ où $k \in [1, n]$.
(a) Montrer que pour tout $i \in [0, k-1]$, $-i$ est une racine de P .
(b) On pose $T_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x+i)$. En déduire qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $P(x) = T_k(x)Q(x)$.
(c) Établir que $Q(x+1) = Q(x)$. En déduire que $P \in \text{Vect}(T_k(x))$. Conclure.