

Mathématiques
Planche N°10

Exercice 1

1. On considère une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de réels strictement positifs et on définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par :

$$u_0 = a_0 \text{ et, pour } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$$

- (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est bien définie.
 - (b) Donner une condition nécessaire simple, portant sur la suite $(a_n)_{n \geq 0}$, pour que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge.
 - (c) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a : $u_n^2 = a_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^2}{u_k^2} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k$.
 - (d) En déduire une condition, portant sur la suite $(a_n)_{n \geq 0}$, équivalente à la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
2. On se place dans la situation où $a_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $a_n = n$.
Déterminer un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers l'infini.
3. On s'intéresse au cas où $a_n = r^n$ avec $r \in]0, 1[$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\ln X$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

- 1. Déterminer une densité f de X .
- 2. Montrer que pour tout $n \geq 1$ le moment d'ordre n , $\mathbb{E}(X^n)$ de X existe et le calculer.
On pourra poser $u = \ln(x)$.
- 3. Soit $\alpha \in [-1, 1]$ et f_α la fonction définie par :

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} f(x) (1 + \alpha \sin(2\pi \ln x)) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que, f_α est la densité d'une variable aléatoire X_α telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}(X_\alpha^n) = \mathbb{E}(X^n)$$

Que peut-on en déduire ?