Filière B/L

Épreuve de mathématiques 1

Préparation : 30 min

Planche 25

Présentation : 30 min

Les candidats présenteront les deux exercices dans l'ordre de leur choix.

Exercice 1

1. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $tr({}^tAA) = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
2. Montrer que pour toute forme linéaire de f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$f(M) = tr(MA)$$

On pourra étudier l'application $A \mapsto (M \mapsto tr(MA))$ et montrer que c'est un isomorphisme.

Exercice 2

Soit $p \in]0, 1[$, et soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X = n] \cap [Y = k]) = \begin{cases} \lambda(1-p)^k & \text{si } k \geq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y). Quelle est la loi de $X + 1$? En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
3. Montrer que X et $Y - X$ suivent la même loi.
4. Montrer que X et $Y - X$ sont indépendantes. En déduire $\text{Cov}(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Filière B/L

Épreuve de mathématiques 1

Préparation : 30 min
Présentation : 30 min

Planche 26

Les candidats présenteront les deux exercices dans l'ordre de leur choix.

Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Soient n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ notés $x_1, \ldots, x_n$. On note $\mathscr{F} = \text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.
On note M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la j-ième colonne est constituée des coordonnées de x_j dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On note enfin $G = {}^t MM$.

1. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, expliciter simplement le coefficient $\left[G\right]_{i,j}$ de G situé sur la i-ième ligne et j-ième colonne en fonction des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$.

2. a. Montrer que $\ker(M) \subset \ker(G)$.

b. Soit $Y \in \ker(G)$. Montrer que $\|MY\| = 0$.

c. En déduire que $\text{rg}(M) = \text{rg}(G)$.

3. Quelle relation peut-on en déduire entre $\text{rg}(G)$ et $\dim(\mathscr{F})$?

Exercice 2

Soit n un entier strictement supérieur à 1.
On effectue une suite de n tirages avec remises dans une boîte contenant n boules numérotées de 1 à n.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$ on note X_i la variable aléatoire indiquant le nombre de fois où la boule portant le numéros « i » a été tirée.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Quelle est la loi suivie par X_i ? Quelle est son espérance ? Sa variance ?

2. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ et $i \neq j$.

a. Déterminer la loi du couple (X_i, X_j).

b. Déterminer $\text{Cov}(X_i, X_j)$.

c. Quel est le coefficient de corrélation $\rho_{(X_i, X_j)}$? Comment l'interpréter dans le cas $n = 2$?

3. Déterminer $\mathbb{V}(S_n)$ où $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$?