ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

Planche 17

Vous présenterez ces <u>deux</u> exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

Soit $p \in]0,1[$ et soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est donnée par

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}([X=n] \cap [Y=k]) = \begin{cases} \lambda(1-p)^k \text{si } k \geq n \\ 0 \qquad \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Déterminer les lois de X et Y. Quelle est la loi de $X+1$? En déduire l'espérance et la variance de X.
3. Montrer que X et $Y-X$ suivent la même loi.
4. Montrer que X et $Y-X$ sont indépendantes. En déduire $\mathrm{Cov}(X,Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et, pour tout entier $n \geq 1$, soit f_n la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe

$$f_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x - a_0\,.$$

1. Pour $n \geq 1$ entier, montrer qu'il existe un unique élément $x \in]0,+\infty[$ tel que $f_n(x) = 0$. On le note x_n.
2. Etudier la monotonie et la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.
3. On considère maitnenant le cas où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n+1$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $x_n \leq \frac{1}{2}$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$. On pourra introduire la fonction g_n définie par

$$\forall x \in [0,+\infty[\,,\ g_n(x) = x^{n+1} + x^n + \cdots + x + 1\,.$$

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

Planche 25

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

On suppose que le nombre de personnes qui se présentent aux caisses d'un grand magasin en une heure est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le magasin comporte $N > 3$ caisses, et on suppose que chaque personne choisit au hasard sa caisse parmi les N. Pour $1 \leq i \leq N$, on note X_i le nombre de personnes ayant choisi la caisse numéro i.

1. Déterminer la loi de X_i conditionnellement à l'événement $X = n$, puis la loi de X_i.
2. Déterminer, sans nouveaux calculs la loi de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de X_1 et X_2.
4. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

Soit

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x} \mathrm{d}x\,.$$

1. Montrer que I est bien définie.

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $\delta_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1-x} \ln(x) \mathrm{d}x$.

2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$I = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 x^k \ln(x) \mathrm{d}x + \delta_n\,.$$

3. Montrer que la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
4. Calculer, pour tout entier $k \geq 0$, la valeur de $\int_0^1 x^k \ln(x) \mathrm{d}x$.
5. En déduire la valeur de I.

On admettra que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.