

Les candidats présenteront les deux exercices dans l'ordre de leur choix.

Exercice 1

Soient f et g deux projecteurs non nuls d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E vérifiant :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad f \circ g - g \circ f = \lambda f + \mu g.$$

On suppose $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R} \setminus \{0; 1\})^2$.

1.
 - a. Vérifier que $f \circ g - g \circ f \circ g = \lambda f \circ g + \mu g$ et en déduire que, pour tout $x \in E$, $(f \circ g)(x) \in \text{Im}(g)$.
 - b. En déduire que $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(g)$.
2.
 - a. Justifier que $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$ et que $\text{Im}(g) = \{x \in E, g(x) = x\}$.
 - b. Montrer que $f \circ g = f$.
 - c. En déduire $\lambda + \mu = 0$.
3. En conclure que $f = g$.

Exercice 2

Une urne contient $2n$ boules ($n \in \mathbb{N}^*$). La moitié d'entre elles sont marquées du chiffre zéro et les autres sont numérotées de 1 à n .

On extrait simultanément n boules de cette urne, obtenant ce qu'on appelle une poignée. On suppose que toutes les poignées sont équiprobables. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire réelle qui prend la valeur 1 si la boule portant le numéro i se trouve dans la poignée et 0 sinon.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_i pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
2. Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, déterminer la loi de la variable aléatoire $X_i X_j$.
En déduire $\text{Cov}(X_i, X_j)$.
3. On note S la variable aléatoire réelle prenant pour valeur la somme des numéros portés par les boules figurant dans la poignée.
 - a. Exprimer S en fonction de $X_1, X_2, \dots, X_n$.
 - b. En déduire l'espérance et la variance de S .

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Les candidats présenteront les deux exercices dans l'ordre de leur choix.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = f$.

1. Montrer que $f \circ (f - \text{Id}) \circ (f + \text{Id}) = 0$.
2. Soit λ une valeur propre de f . Quelles sont les valeurs possibles de λ ?
3. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\frac{1}{2}(f^2(x) - f(x)) \in \ker(f + \text{Id}), \quad \frac{1}{2}(f^2(x) + f(x)) \in \ker(f - \text{Id}) \text{ et } (f^2(x) - x) \in \ker(f).$$

4. En déduire que $E = \ker(f) \oplus \ker(f - \text{Id}) \oplus \ker(f + \text{Id})$.
5. f est-il diagonalisable ?

Exercice 2

Dans une population, on sait que 10% des individus sont porteurs d'une caractéristique génétique particulière. On souhaite tester la présence de cette caractéristique dans un échantillon de n individus.

Pour réduire les coûts, on procède à des tests par groupe : au lieu de tester chaque individu séparément, on mélange les prélèvements de k individus et on effectue un seul test sur ce mélange. Si le test est négatif, on en déduit qu'aucun des k individus n'est porteur. Si le test est positif, on doit alors tester chacun des k individus séparément.

1. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de tests nécessaires pour un groupe de k individus.
 - (a) Déterminer la loi de X .
 - (b) Calculer $\mathbb{E}[X]$ en fonction de k et $p = 0.1$.
2. On suppose que l'échantillon comporte $n = mk$ individus, répartis en m groupes de k individus chacun.
 - (a) Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre total de tests nécessaires. Exprimer Y en fonction des variables $(X_i)_{1 \leq i \leq m}$ où X_i représente le nombre de tests pour le i -ème groupe.
 - (b) Calculer $\mathbb{E}[Y]$.
3. Pour $n = 100$, le nombre de groupes m qui minimise le nombre moyen de tests est $m = 25$. Quel est le gain moyen en nombre de tests par rapport à la méthode consistant à tester chaque individu séparément ?