

**Mathématiques**  
**Planche N°61**

*Ce sujet est composé de deux exercices.*

*Le candidats doit les traiter **tous les deux** puis les exposer dans l'ordre de son choix.*

### Exercice 1

On note  $I_3$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et on appelle trace d'une matrice  $A$ , notée  $\text{Tr}(A)$ , la somme de ses coefficients diagonaux.

On s'intéresse à l'équation matricielle  $M^2 = I_3$ , notée  $(E)$ , d'inconnue  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

1. Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  de rang 1.  
Montrer qu'il existe  $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et  $C \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$  telles que :  $A = BC$ .  
En déduire une expression simple de  $A^2$  en fonction de  $A$  et de la trace de  $A$ .
2. Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  une solution de  $(E)$  différente de  $I_3$  et  $-I_3$ .
  - (a) Montrer que  $\text{Im}(M - I_3) \subset \text{Ker}(M + I_3)$ . En déduire que  $M - I_3$  ou  $M + I_3$  est de rang 1.
  - (b) En déduire que  $\text{Tr}(M - I_3) = -2$  ou  $\text{Tr}(M + I_3) = 2$ .
  - (c) Donner finalement l'ensemble des solutions de  $(E)$ .

### Exercice 2

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et suivant toute la loi uniforme sur  $[0, a]$  où  $a$  est un réel strictement positif. On a en particulier, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n(\Omega) = [0, a]$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\omega \in \Omega$ , on pose  $X_n(\omega) = \max(U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_n(\omega))$ .

1. Montrer que  $X_n$  est une variable aléatoire à densité, déterminer son espérance et sa variance.
2. (a) Étudier la convergence en loi de la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .  
(b) Étudier la convergence en probabilité de la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
3. (a) Montrer que pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ , la suite  $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente. On note  $X(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega)$ .  
(b) Soit  $\varepsilon > 0$ . On note, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_{n,\varepsilon} = [X_n \geq a - \varepsilon]$  et  $A_\varepsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_{n,\varepsilon}$ .  
Calculer  $P(A_\varepsilon)$ .  
(c) On note  $\Omega' = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} A_{1/k}$ . Montrer que  $P(\Omega') = 1$  et que :  $\forall \omega \in \Omega', X(\omega) = a$ .