



ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

Planche 15

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1

Le nombre quotidien de clients entrant dans une boulangerie suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque client a la probabilité $p \in]0, 1[$ d'acheter des croissants. Sur une journée, on note X_1 le nombre de clients ayant acheté des croissants et X_2 le nombre de ceux qui n'en ont pas achetés.

1. Déterminer la loi de X_1 .
2. Calculer la covariance de X_1 et X_2 .
3. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 Pour tout entier n , on note $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$, et on pose $0! = 1$. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que, pour tout $n \geq 0$, $u_n \in \{-1, +1\}$. On pose

$$\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!}.$$

1. Donner la valeur de ℓ quand $u_n = 1$, puis quand $u_n = (-1)^n$.
2. Pour tout entier q strictement positif, montrer que $\sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{n!} < \frac{1}{q}$.
3. Pour tout entier q strictement positif, montrer que $\sum_{n=q+2}^{+\infty} \frac{q!}{n!} < \frac{1}{q(q+1)}$.
4. En déduire que ℓ n'est pas un nombre rationnel, c'est-à-dire ne peut pas s'écrire comme quotient p/q de deux entiers p et q .