## Table des matières

# Première partie

# Analyse

**ExoAIntGauss**

## Exercice 1

Pour tout entier $n \geq 0$, on considère l'intégrale

$$I_n(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x$$

pour $\sigma \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de $\alpha$ et $n$ l'intégrale $I_n(\alpha)$ est-elle finie ? On supposera qu'on se trouve dans ce cas dans le reste de l'exercice.
2. Calculer $I_0(\sigma)$.
3. Trouver une relation de récurence sur $I_n(\alpha)$.
4. En déduire une expression pour $I_n(\alpha)$.

**ExoASuiteInt**

## Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^n(1+x)} \mathrm{d}x.$$

1. Vérifier que $I_n$ est bien définie pour $n \geq 1$. Montrer que $I_1 = \ln(2)$
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ décroît.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.
4. Calculer $I_{n+1} + I_n$. En déduire $(-1)^n I_n = \ln(2) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.
5. En déduire la valeur de la limite $\lim_{n\geq +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

**ExoASuiteFonc**

## Exercice 3

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $f_n$ la fonction qui à tout réel $x$ associe $x^n + x - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une unique solution $x_n \in ]0,1[$ à l'équation $f_n(x) = 0$.
2. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers un nombre $\ell \in ]0,1]$.
4. Montrer que $\ell = 1$.

**ExoASuiteFoncB**

## Exercice 4

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $f_n$ la fonction qui à tout réel $x$ associe $e^{-x} - x^{2n-1}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une unique solution $x_n \in ]0, 1[$ à l'équation $f_n(x) = 0$.
2. Calculer $f_{n+1}(x_n)$ et en déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\ln(x_n) = -\frac{x_n}{2n-1}$.
4. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers 1.

**ExoASuiteFoncC**

## Exercice 5

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n$ définie par

$$f_n(x) = e^{-nx} - x$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution positive $x_n$ à l'équation $f_n(x) = 0$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est monotone. En déduire sa convergence vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
3. Calculer la valeur de la limite $\ell$ de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.
4. Montrer que la suite $(nx_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

**ExoAThAC**

## Exercice 6

Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction dérivable de dérivée continue telle que

$$\forall x \in [a, b], |f'(x)| < 1.$$

1. Montrer qu'il existe au moins une solution $p \in [a, b]$ à l'équation $f(p) = p$.
2. Montrer que la solution est unique.

Pour tout $x_0 \in [a, b]$, on considère la suite définie par $u_0 = x_0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n \geq 0$.

3. Donner une majoration de $|f(x) - f(y)|$ en fonction de $|x - y|$ pour $x, y \in [a, b]$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

**ExoASuiteNum**

## Exercice 7

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée de réels positifs. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n + a_n + 1}.$$

1. Vérifier que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie.
2. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge, alors la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge.

On cherche maintenant à montrer la propriété réciproque. On suppose désormais que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite $\ell \geq 0$. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_0 = 1$ et

$$v_{n+1} = \frac{1}{v_n + \ell + 1}.$$

3. Vérifier que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est bien définie.
4. Montrer que l'equation
$$x = \frac{1}{x + \ell + 1}$$
pour $x \geq 0$ possède une unique solution $L > 0$.
5. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers $L$.
6. Étudier $u_n - v_n - A(a_n - \ell)$ for $A$ assez grand. En déduire que la suite $(u_n - v_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

**ExoAFoncInt**

## Exercice 8

Soit $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante telle que son intégrale sur $\mathbb{R}$ est convergente.

1. Pour tout $x \geq 1$, donner un encadrement de $f(x)$ à partir d'intégrale de $f$.
2. En déduire que $f$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
3. Par une méthode similaire, montrer que $x \mapsto xf(x)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
4. Donner un exemple de fonction $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que son intégrale sur $\mathbb{R}$ est convergente qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

**ExoAIntEuler**

## Exercice 9

On considere les intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\mathrm{d}x.$$

1. Vérifier que $I$ et $J$ sont bien définies. Montrer que $I = J$.
2. Calculer $I + J$.
3. En trouvant une relation entre $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\mathrm{d}x$ et $J$, en déduire la valeur de $I$ et $J$.

**ExoATransAbel**

## Exercice 10

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que

(i) il existe $M$ un réel positif tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $|\sum_{n=0}^{N} a_n| \leq M$,

(ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.$$

2. En déduire que $\sum_0^N a_n b_n$ converge lorsque $N$ tend vers l'infini.
3. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

**ExoASuiteA**

## Exercice 11

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a

$$x + 1 < e^x < xe^x + 1\,.$$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+1} = \ln\left(\frac{e^{u_n} - 1}{u_n}\right)\,.$$

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
5. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge quand $n$ tend vers $+\infty$ et donner sa limite.

**ExoASuiteD**

## Exercice 12

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la donnée de $u_1 \geq 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n}\,\cdot$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$.
2. Dans le cas particulier où $u_1 = 1$, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $u_n$.

On suppose désormais que $u_1 > 1$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n > n$. On pourra vérifier que

$$u_{n+1} - (n+1) = \frac{1}{u_n}\left(u_n^2 - (n+1)u_n + n\right)\,,$$

et chercher à factoriser cette expression.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_n = u_n - n$.
   (a) Etudier les variations de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et montrer qu'elle converge.
   (b) En déduire que $\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

**ExoASuiteE**

## Exercice 13

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et, pour tout entier $n \geq 1$, soit $f_n$ la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe

$$f_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x - a_0\,.$$

1. Pour $n \geq 1$ entier, montrer qu'il existe un unique élément $x \in ]0, +\infty[$ tel que $f_n(x) = 0$. On le note $x_n$.
2. Etudier la monotonie et la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.
3. On considère maitnenant le cas où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n + 1$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $x_n \leq \frac{1}{2}$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$. On pourra introduire la fonction $g_n$ définie par

$$\forall x \in [0, +\infty[\,,\ g_n(x) = x^{n+1} + x^n + \cdots + x + 1\,.$$

**ExoASuiteF**

## Exercice 14

Pour tout entier $n \geq 3$, on note $f_n$ la fonction qui à tout réel $x$ associe $x^n + x^{n-1}$.

1. Soit $n \geq 3$.
   (a) En considérant la fonction $f_n$, établir que l'équation $x^n + x^{n-1} = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$. On la note $x_n$.
   (b) Montrer que $x_n > 1$.
2. (a) Justifier l'existence d'un entier $n_0 \geq 3$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{n}{2}$.
   (b) À l'aide de ce résultat, montrer que pour tout entier $n \geq n_0$, on a $f_{n+1}(x_n) \geq n+1$. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante et montrer que $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} 1$.
3. Montrer que $\frac{n}{\ln(n)}(x_n - 1) \underset{n \to +\infty}{\to} 1$. On pourra par exemple commencer par vérifier que $2x_n^{n-1} \leq n \leq 2x_n^n$.

**ExoASuiteG**

## Exercice 15

On considère une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $u_0 > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}\,.$$

1. Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite, finie ou non, que peut-on dire de cette limite ?
2. Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_{p+1} \leq u_p$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang $p$ et tend vers 0.
3. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque l'hypothèse précédente n'est pas vérifiée ?
4. Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p \leq p+1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
5. Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p \geq p+2$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
6. Prouver l'existence d'un réel $\alpha$ de $[1, 2]$ tel que si $u_0 < \alpha$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et si $u_0 > \alpha$, alors elle diverge.

**ExoASuiteH**

## Exercice 16

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ donnée par $u_1 = 1$ et

$$\forall n \geqslant 2\,,\ u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}\,.$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{2n}$, et en déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$, et en déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (u_n - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}$.

**ExoAIntegraleA**

## Exercice 17

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée, et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-\frac{x}{a_n}} \frac{1}{a_n} \mathrm{d}x \,.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n$ est convergente.
2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $M > 0$, on a

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(0)e^{-u}\mathrm{d}u + \int_0^{M} \left(f(a_n u) - f(0)\right) e^{-u}\mathrm{d}u + \int_M^{+\infty} \left(f(a_n u) - f(0)\right) e^{-u}\mathrm{d}u \,.$$

3. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on calculera.

**ExoAIntegraleB**

## Exercice 18

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in [0,1]\,,\ f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \,.$$

1. Montrer que $f$ réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[0, \ln(1+\sqrt{2})]$. On note $g$ la réciproque de $f$.
2. Montrer que

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \ln(1+\sqrt{2}) - \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} g(u)\mathrm{d}u \,.$$

3. En déduire la valeur de $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**ExoAIntegraleC**

## Exercice 19

On pose, pour tout réel $x \geq 0$,

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\mathrm{d}t \,.$$

1. Calculer $f(0)$ et montrer que $f$ est décroissante sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$, on a

$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1} \,,$$

   et en déduire que $2xf(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 1$.
3. Montrer que, pour tout $(x,y) \in [0,+\infty[^2$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} \right| \leq |x-y| \,.$$

**ExoAIntegraleD**

## Exercice 20

Soit
$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\mathrm{d}x\,.$$

1. Montrer que $I$ est bien définie.

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $\delta_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1-x}\ln(x)\mathrm{d}x$.

2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a
$$I = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 x^k \ln(x)\mathrm{d}x + \delta_n\,.$$

3. Montrer que la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
4. Calculer, pour tout entier $k \geq 0$, la valeur de $\int_0^1 x^k \ln(x)\mathrm{d}x$.
5. En déduire la valeur de $I$.

*On admettra que* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

**ExoAIntegraleE**

## Exercice 21

Soit $g : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$\forall y \in [0, +\infty[\,,\ g(y) = \int_0^y \exp(t^4)\mathrm{d}t\,.$$

1. Montrer que $g$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans un ensemble à préciser.
2. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, il existe un unique réel, noté $f(x)$, tel que
$$\int_x^{f(x)} \exp(t^4)\mathrm{d}t = 1\,.$$
3. Etudier la continuité et la dérivabilité de $f$ sur $[0, +\infty[$, et montrer que $f$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
4. Montrer que $f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, puis que $e^{x^4}(f(x) - x) \underset{x\to+\infty}{\to} 1$.

**ExoAIntegraleF**

## Exercice 22

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a
$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left( x^2 - 2x \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right) .$$
2. On pose, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,
$$I(x) = \int_0^\pi \ln\left(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\right) \mathrm{d}\theta \,.$$
   (a) Vérifier que $I(x)$ est bien définie.
   (b) On suppose que $|x| < 1$. On admet que pour toute fonction $f$ continue sur $[a, b]$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$
   En utilisant la première question et la propriété ci-dessus, montrer que $I(x) = 0$.
   (c) On suppose maintenant $|x| > 1$. Montrer qu'alors $I(x) = 2\pi \ln(|x|)$.

**ExoAIntegraleG**

## Exercice 23

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que $\frac{h_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

Pour tout entier $n \geq 1$, et tout réel $x \in [0, 1]$, on définit
$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x)(1+\frac{x}{2})\dots(1+\frac{x}{n})} \,.$$
On introduit également l'intégrale
$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \,.$$

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f_n(x) \leq \frac{1}{1+xh_n}$, et en déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
3. Calculer et encadrer la dérivée de $-\ln(f_n)$ sur $[0, 1]$, et en déduire que pour tout $x \in [0, 1]$,
$$e^{-xh_n} \leq f_n(x) \leq e^{-x(h_n-1)} \,.$$
4. Établir que $\ln(n) I_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

**ExoAHolder**

## Exercice 24

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction dérivable de dérivée continue telle que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même. On note $g$ la fonction réciproque de $f$.

1. Montrer que $f$ est strictement croissante et $f(0) = 0$.
2. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,
$$xf(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} g(t)dt.$$
3. En déduire que pour tout $x, y \geqslant 0$ :
$$xy \leqslant \int_0^x f(t)dt + \int_0^y g(t)dt.$$
4. Soient $p$ et $q$ deux réels plus grand que 1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, montrer que pour tout $x, y \geqslant 0$ :
$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$
(on cherchera une fonction simple $f$ telle que $\int_0^x f(t)dt = x^p/p$).
5. En déduire que si $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ sont des réels ; on a :
$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n (a_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (b_i)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$
(on pourra commencer par étudier le cas où $(\sum_{i=1}^n (a_i)^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=1}^n (b_i)^q)^{\frac{1}{q}} = 1$) Que reconnaissez vous pour $p = q = 2$ ?

**ExoAGromwall**

## Exercice 25

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée continue telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ ,\ |f'(x)| \leq |f(x)| .$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a
$$|f(x)| \leq \left| \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t \right| + |f(0)| .$$
2. En notant $\varphi = |f|$, en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a
$$\varphi(x) \leq \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t + \varphi(0) .$$
3. On définit la fonction $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}^+ ,\ \Phi(x) = e^{-x} \left( \varphi(0) + \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t \right) .$$
En étudiant les variations de $\Phi$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\Phi(x) \leq \Phi(0)$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a
$$|f(x)| \leq |f(0)|e^x .$$

**ExoAEntropie**

## Exercice 26

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit

$$E_n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in [0; 1]^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}.$$

pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans $E_n$ on note

$$h(x) = -\sum_{i=1}^n x_i \ln x_i$$

avec la convention $0 \ln 0 = 0$

1. Montrer que si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est dans $E_n$, $h(x) \geqslant 0$.
2. Quels sont les $x$ de $E_n$ pour lesquels $h(x) = 0$ ?
3. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $nx_i \ln(nx_i) \geq nx_i - 1$. Quand y a t-il égalité ?
4. En déduire que si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est dans $E_n$, alors $h(x) \leq \ln n$.
5. Quels sont les $x$ de $E_n$ pour lesquels $h(x) = \ln n$ ?

**ExoAsuiterecsin**

## Exercice 27

Soi $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $0 < u_0 < \pi$ et pour tout $n > 0$ :

$$u_n = \sin u_{n-1}.$$

1. Étudiez la convergence de $u$.
2. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers 1 lorsque $n$ tend vers l'infini. Calculer la limite de $\frac{u_{n+1}+u_n}{u_n}$.
3. Montrer que $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^3}$ tend vers $\frac{1}{6}$.
4. En déduire que $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ tend vers $\frac{1}{3}$
5. En déduire la limite de $\sqrt{n}u_n$. Pour cette dernière question, on admettra le résultat suivant : si une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors

$$\frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} \ell.$$

**ExoAPol**

## Exercice 28

Pour tout $n$ entier supérieur où égal à 2, on considère la fonction :

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $f_n$ a une unique racine réelle positive que l'on nommera $\lambda_n$.
2. Montrer $0 < \lambda_n < \frac{3}{4}$.
3. Montrer que la suite $(\lambda_n)$ est croissante puis qu'elle converge vers une limite que l'on notera $\ell$.
4. Montrer que $\ell$ est racine du polynôme $X^2 + X - 1$. En déduire sa valeur.

**ExoARac**

## Exercice 29

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x$, on pose $f_n(x) = x\cos^n x$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $f_n$ atteint son maximum sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ en un unique point $x_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$, qui correspond à l'unique solution sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ de l'équation $x\tan(x) = \frac{1}{n}$.
2. Quel est le sens de variation de la suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ? Quelle est sa limite ?
3. Montrer que $nx_n^2 \to 1$ lorsque $n \to +\infty$.
4. Trouver la limite de $\sqrt{n}f_n(x_n)$.

**ExoAaarctan**

## Exercice 30

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\tan(x) = x$ a une unique solution dans $]n\pi - \frac{\pi}{2}; n\pi + \frac{\pi}{2}[$. On note dans toute la suite $x_n$ cette solution.
2. Trouver une relation simple entre $x_n$ et $\mathrm{Arctan}(x_n)$.
3. Quelle est la limite $c$ lorsque $n$ tend vers l'infini de $\frac{x_n}{n}$ ?
4. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}) = \pi/2.$$
5. En déduire la limite $\ell$ lorsque $n$ tend vers l'infini de $x_n - cn$.

**ExoASemiC**

## Exercice 31

On pose, pour $n$ dans $\mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} x^{2n}\sqrt{4 - x^2}dx.$$

1. Calculer $u_0$ à l'aide du changement de variable $x = 2\cos\theta$.
2. À l'aide d'une intégration par partie, trouvez une relation entre $u_{n+1}$ et $u_n$.
3. On appelle, pour $n$ dans $\mathbb{N}$, $n$ ième nombre de Catalan le nombre
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$
Calculer $C_0$ et $\frac{C_{n+1}}{C_n}$.
4. Montrer que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $u_n = C_n$.

**ExoAsuiteavecpuissance**

## Exercice 32

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par récurrence telle que $u_0 > 0$ et pour $n \geqslant 1$ :
$$u_n = u_{n-1} + \frac{1}{(u_n)^2}$$

1. Quel est le sens de variation de la suite $u$ ? Que dire de sa limite en l'infini.
2. Trouver un réel $a > 0$ tel que la suite $v_n = (u_n)^a - (u_{n-1})^a$ converge vers une limite finie $\ell > 0$ et donner la valeur de $\ell$
3. Quelle est la limite lorsque $n$ tend vers l'infini de $\frac{u_n^a}{n}$ ?

**ExoAdilate**

## Exercice 33

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x, y$ réels on a

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$$

On suppose de plus que $f(0) = 0$ et que $f(1) > 1$. On pose $x_0 = 1$ et on définit par récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$.

1. Montrer que $f$ est injective.
2. Montrer que $f$ est une bijection croissante.
3. Montrer que la suite définie par $y_n = x_{n+1} - x_n$ est croissante.
4. En déduire la limite de $x_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.
5. Le résultat reste-t-il vrai sans l'hypothèse $f(1) > 1$ ?

**ExoAPuissanceequ**

## Exercice 34

Soient $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ des réels fixés.

1. Montrer que pour tout réel $b > a_p$ il existe un unique réel $x_b > 0$ tel que
$$a_1^{x_b} + \cdots + a_p^{x_b} = b^{x_b}$$
(indication : commencer par regarder le cas $b = 1$).
2. Pour $b < b'$, comparer $x_b$ et $x_{b'}$.
3. Chercher $\lim_{b\to+\infty} x_b$ puis en déduire $\lim_{b\to+\infty} x_b \ln b$.

**ExoAPythagore**

## Exercice 35

Pour tout entier $n \geq 0$ on pose

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos^2 x}{x+1} dx \quad \text{et} \quad v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x+1} dx$$

1. Calculer $a_n = u_n + v_n$. En déduire que la série $\sum_n a_n$ est divergente.
2. En utilisant la relation $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$ et une intégration par partie, montrer que pour tout $n > 0$, on a
$$|u_n - v_n| \leq \frac{1}{2\pi n^2}.$$
3. En déduire que $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont deux séries divergentes.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose
$$f_\alpha(x) = \frac{\sin^2 x}{(x+1)^\alpha} \quad \text{for } x \geq 0.$$
Pour quelles valeurs de $\alpha$ la fonction $f_\alpha$ admet une intégrale sur $[0, \infty]$ ?

**ExoAsuiteT**

## Exercice 36

On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et définie par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (-1)^n \sin\left(\frac{u_n}{2}\right).$$

1. Montrer que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{y}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2}|x-y|.$$
2. On pose $v_n = u_{2n} - u_{2n-2}$ pour $n \geq 1$. Montrer que $|v_{n+1}| \leq |v_n|/4$. En déduire que la *série* de terme général $v_n$ est absolument convergente puis que la suite extraite $(u_{2n})_{n\geq 0}$ est convergente.
3. Montrer de même que la suite extraite $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ est convergente.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et calculer sa limite.

**ExoAsuite**

## Exercice 37

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par récurrence telle que $u_0 > 0$ et pour $n \geqslant 1$ :

$$u_n = u_{n-1} + \frac{1}{(u_{n-1})^2}$$

1. Quel est le sens de variation de la suite $u$ ? Que dire de sa limite en l'infini ?
2. Trouver un réel $a > 0$ tel que la suite $v_n = (u_n)^a - (u_{n-1})^a$ converge vers une limite finie $\ell > 0$ et donner la valeur de $\ell$.
3. Pour la valeur de $a$ trouvé à la question précédante, quelle est la limite lorsque $n$ tend vers l'infini de $\frac{u_n^a}{n}$ ?

**ExoATVI**

## Exercice 38

Soient $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ des réels fixés.

1. Montrer que pour tout réel $b > a_p$ il existe un unique réel $x_b > 0$ tel que
$$a_1^{x_b} + \cdots + a_p^{x_b} = b^{x_b}$$
(indication : commencer par regarder le cas $b = 1$).
2. Pour $b < b'$, comparer $x_b$ et $x_{b'}$.
3. Chercher $\lim_{b\to+\infty} x_b$ puis en déduire $\lim_{b\to+\infty} x_b \ln b$.

**ExoAsuiteparabole**

## Exercice 39

Soit $(u_n)$ une suite réelle telle que pour tout entier $n$ :

$$u_n \in [0,1] \quad \text{et} \quad u_{n+1}(1-u_n) > \frac{1}{4}.$$

1. étudier la fonction $f(x) = 4x(1-x)$ sur $[0,1]$.
2. En déduire que $(u_n)$ est croissante.
3. Conclure que $(u_n)$ converge et donner sa limite.

**ExoAIntDer**

## Exercice 40

Soit $g$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

où $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\int_0^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t < +\infty$.

1. Étudier le prolongement par continuité de $g$ en 0.
2. Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $g(x)$ pour $x > 0$.
3. Pour $0 < a < b$, montrer que

$$\int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t = 2\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t + ag^2(a) - bg^2(b)$$

   puis, à l'aide de l'inégalité (admise) $\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t}$, montrer que

$$\sqrt{\int_a^{+\infty} g^2(t)\mathrm{d}t} \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2(t)dt}$$

4. Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^2(t)\mathrm{d}t$.

**ExoAIntSuite**

## Exercice 41

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

1. Montrer que $u_n$ est bien définie.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente. Déterminer sa limite notée $\ell$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, donner un développement limité simple de $u_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.
4. Montrer qu'il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que à l'infini, on a :

$$u_n = \ell + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

**ExoAIntSuitebis**

## Exercice 42

Soit $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ existe et que $u_n > 0$.
2. Montrer, grâce à une intégration par parties : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1})$. En déduire :
$$\forall n \geq 2, \quad u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right).$$
3. Montrer que $u_n \longrightarrow 0$.

**ExoAIntPara**

## Exercice 43

On définit pour tout $x \in ]0; +\infty[$ l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$.

1. Montrer que $I(x)$ existe pour tout $x \in ]0; +\infty[$.
2. On note, pour tout $x \in ]0; 1]$ $J(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt$. Montrer que
$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\, dt + J(x) = -\ln x.$$
3. Établir que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt$ converge.
4. À l'aide de $J(x)$, montrer que $I(x) \sim -\ln x$.

**ExoAsuitelog**

## Exercice 44

Soient $0 < a < b$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$$

1. En étudiant d'abord $(\log u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $v_n = n^\alpha u_n$. En étudiant $(v_n)_{n\geq 1}$, montrer qu'il existe $A > 0$ tel que en $+\infty$
$$u_n = \frac{A}{n^{b-a}} + o\left(\frac{1}{n^{b-a}}\right).$$
3. On suppose $b - a > 1$ . À l'aide d'un téléscopage bien écrit, donner la valeur de la somme
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

**AAnalyseunplusxn**

## Exercice 45

Pour tout entier $n \geq 0$, on considère les intégrales

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$$

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$$

pour $\sigma \in \mathbb{R}$.

1. Trouver un lien entre $I_n$ et $J_n$ au moyen d'un changement de variable $x \to 1/x$.
2. Que vaut $I_n + J_n$ ?
3. Calculer $I_n$ et $J_n$.
4. Quelle est la limite lorsque $n$ tend vers l'infini de $\int_1^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$ ?

**AAnalyseimplicite**

## Exercice 46

Soit $h(x) = x + exp(x)$ Soit $f(x,y) = x + y + \exp(x) + \exp(y) = h(x) + h(y)$

1. Montrer que $h$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans un intervalle qu'on précisera et que sa réciproque est $h^{-1}$ est dérivable.
2. Montrer que pour tout $x$ il existe une unique solution $y$ à l'équation $f(x,y) = 2$. On appelle cette solution $y(x)$.
3. Étudiez les variations de $y(x)$ et sa limite en $+\infty$ et $-\infty$. Calculez $y(0)$.
4. Calculer la limite de $\frac{y(x)-y(0)}{x}$ lorsque $x$ tend vers 0.

**AAnalyseconvergence**

## Exercice 47

Soit $f_{\alpha,\beta}(x) = |\sin(x)|^\alpha |t|^\beta$ où $\alpha, \beta$ sont des réels non nécessairement positifs.

1. Pour quels valeurs de $\alpha, \beta$ réels est ce que l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{\alpha,\beta}(x)dx$ est convergente ?
2. Pour quels valeurs de $\alpha, \beta$ réels est ce que l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f_{\alpha,\beta}(x)dx$ est convergente ?
3. Montrer qu'il existe une certaine constante $C > 0$ telle que pour tout $\alpha, k,\ k \in \mathbb{N}^*$

   $$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f_{\alpha,\beta}(x)dx \geqslant \frac{C}{k}$$

   .
4. Pour quels valeurs de $\alpha, \beta$ réels est ce que l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} f_{\alpha,\beta}(x)dx$ est convergente ?
5. Pour quels valeurs de $\alpha, \beta$ réels est ce que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha,\beta}(x)dx$ est convergente ?

**AAnalysepreserve**

## Exercice 48

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ est convergente. Soit $g$ la fonction

$$g(x) = \begin{cases} f(x - \frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Étudiez la fonction $\phi(x) = x + \frac{1}{x}$ (domaine de définition, sens de variation, limites au bord du domaine de définition, graphe)
2. Montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ est une intégrale convergente (on pourra utiliser le changement de variable $x \to \phi(x)$ sur un intervalle correctement choisit)
3. Montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$
4. Est ce que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}dx$ est convergente ? Si oui quelle est sa valeur ?

# Deuxième partie
# Probabilités

**ExoPCoupleConj**

## Exercice 1

Soit $p \in ]0,1[$ et soit $(X,Y)$ un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est donnée par

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}([X=n] \cap [Y=k]) = \begin{cases} \lambda(1-p)^k \text{si } k \geq n \\ 0 \qquad \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de $\lambda$.
2. Déterminer les lois de $X$ et $Y$. Quelle est la loi de $X+1$ ? En déduire l'espérance et la variance de $X$.
3. Montrer que $X$ et $Y-X$ suivent la même loi.
4. Montrer que $X$ et $Y-X$ sont indépendantes. En déduire $\text{Cov}(X,Y)$. $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**ExoPBouleRem**

## Exercice 2

On considère une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$, et on effectue deux tirages avec remise dans cette urne. On note $X$ le numéro de la première boule extraite et $Y$ le numéro de la seconde. On note également $U = \min(X,Y)$ le plus petit des deux numéros tirés et $V = \max(X,Y)$ le plus grand.

1. Donner la loi de $U$ et la loi de $V$ .
2. Calculer l'espérance et la variance de $U$ et $V$ .
3. Déterminer une relation liant $X, Y, U$ et $V$ . En déduire $\text{Var}(U+V)$, puis le coefficient de corrélation linéaire de $U$ et $V$ .
4. Pour $k \in [\![2, 2n]\!]$, déterminer $\mathbb{P}(X+Y=k)$. On pourra distinguer les cas $k \leq n$ et $k > n$.

**ExoPAmpoulesExp**

## Exercice 3

La durée de vie d'un certain modèle d'ampoule électrique, exprimée en heures, peut être modélisée par une variable aléatoire $X$ de loi exponentielle $E(\lambda)$ avec $\lambda = 1/1000$. On contrôle l'état d'une ampoule neuve après 300h d'utilisation.

1. Déterminer la probabilité que l'ampoule soit hors d'usage.
2. Si elle fonctionne, calculer la probabilité que sa durée de vie soit inférieure à 400h.
3. On équipe un local d'un nombre $n \geq 2$ d'ampoules électriques neuves. On suppose que les durées de vie $X_1, \ldots, X_n$ de ces ampoules sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi $E(\lambda)$. On contrôle l'état des ampoules après 300h d'utilisation. Avec quelle probabilité deux ampoules exactement sont-elles hors d'usage ?

**ExoPDensity**

## Exercice 4

Soit $a > 0$ et soit $f_a : t \mapsto \begin{cases} at^{-a-1} & t \in [1, +\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que $f_a$ est une densité.
2. Soit $X$ une variable aléatoire admettant $f_a$ pour densité.
   (a) Déterminer la fonction de répartition $F_X$ de $X$.
   (b) X possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer. Même question pour la variance.
   (c) On pose $Y = \ln X$. Déterminer la fonction de répartition de $Y$, puis reconnaître la loi de $Y$.

**ExoPCaisses**

## Exercice 5

On suppose que le nombre de personnes qui se présentent aux caisses d'un grand magasin en une heure est une variable aléatoire $X$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le magasin comporte $N > 3$ caisses, et on suppose que chaque personne choisit au hasard sa caisse parmi les $N$. Pour $1 \leq i \leq N$, on note $X_i$ le nombre de personnes ayant choisi la caisse numéro $i$.

1. Déterminer la loi de $X_i$ conditionnellement à l'événement $X = n$, puis la loi de $X_i$.
2. Déterminer, sans nouveaux calculs la loi de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de $X_1$ et $X_2$.
4. Les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ sont-elles indépendantes ?

**ExoPMatriceDiag**

## Exercice 6

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres $p$ et $q > 0$. On définit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}.$$

Quelle est la probabilité que la matrice $A$ soit diagonalisable ? Que dire si $X$ et $Y$ suivent des lois de Bernoulli ?

**ExoPPileFace**

## Exercice 7

On lance une pièce avec la probabilité $p$ de faire « Pile ». On note $A_n$ l'événement

« on obtient pour la première fois deux piles consécutifs lors du $n$-ième lancer »

et l'on désire calculer sa probabilité $p_n$.

1. Déterminer $p_1, p_2$ et $p_3$.
2. Exprimer $p_{n+2}$ en fonction de $p_n$ et $p_{n+1}$ pour $n \geq 1$.
3. Justifier qu'il est quasi-certain d'obtenir deux piles consécutifs.
4. Déterminer le nombre d'essais moyen pour obtenir deux piles consécutifs.

**ExoPCinqDes**

## Exercice 8

On lance cinq dés. Après ce premier lancer ceux des dés qui ont donné un "1" sont mis de côtés et les autres sont relancés. On procède ainsi jusqu'à l'obtention des cinq "1" . On note $T$ la variable aléatoire déterminant le nombre de lancers nécessaires.

1. Calculer $\mathbb{P}(T \leq n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
2. En déduire que $T$ admet une espérance et déterminer celle-ci.

**ExoPDensityVal**

## Exercice 9

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 \text{ si } x \in [-1, 1] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de $a$ pour que $f$ soit une densité de probabilité.
2. Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$. Calculer la fonction de répartition de $X$.
3. On considère une nouvelle variable aléatoire réelle $Y = X^2$. Donner la loi de $Y$ . Cette variable aléatoire est-elle à densité ?

**ExoPUniformeLois**

## Exercice 10

Soit $U$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0; 1]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $[x]$ sa partie entière définie par $[x] \in \mathbb{Z}$ **et** $[x] \leq x < [x] + 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de $X = 1 + [nU]$ ?
2. Soit $p \in ]0; 1[$. Quelle est la loi de $Y = \left[\frac{\ln(U)}{\ln(1-p)}\right]$ ?

**ExoPGaussCov**

## Exercice 11

Non Soit $X$ une variable aléatoire de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour $a > 0$ réel, on définit la variable $Y_a$ par

$$Y_a = \begin{cases} X & \text{si } |X| > a, \\ -X & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Quelle est la loi de $Y_a$ ?
2. Les variables $X$ et $Y_a$ sont-elles indépendantes ?
3. Montrer qu'il existe un réel $a_0 > 0$ tel que la covariance de $X$ et $Y_{a_0}$ soit nulle.

**ExoPFormuleCombi**

## Exercice 12

Soit $n \geq 1$ un entier. On effectue des lancers indépendants d'une pièce équilibrée jusqu'à ce que l'on obtienne soit $n+1$ fois « pile », soit $n+1$ fois « face ». On note $S$ le nombre total de lancers.

1. Vérifier que $S$ prend ses valeurs dans $\{n+1, \ldots, 2n+1\}$.
2. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}(S = k)$, et en déduire la formule

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{\binom{k}{n}}{2^k} = 1\,.$$

**ExoPChaussettes**

## Exercice 13

Soit $n \geq 1$ un entier. Une machine à laver contient $n$ paires de chaussettes distinctes. On sort les chaussettes une à une, uniformément et sans remise. On s'intéresse à la variable aléatoire $T$ égale au nombre de tirages effectués pour pouvoir former la première paire de chaussettes.

1. Montrer que $T$ prend ses valeurs dans $\{2, \ldots, n+1\}$, et déterminer, pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n\}$, la probabilité $\mathbb{P}(T > k)$.
2. Vérifier l'égalité $\mathbb{E}[T] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(T > k)$, et montrer que

$$\mathbb{E}[T] = \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\,.$$

On pourra utiliser la formule suivante que l'on admettra :

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{\binom{k}{n}}{2^k} = 1\,.$$

**ExoPSauts**

## Exercice 14

Une athlète tente de franchir les hauteurs successives $1, 2, \ldots, n \ldots$ On suppose les sauts indépendants et que la probabilité de réussir à franchir la hauteur $n \in \mathbb{N}^*$ est égale à $1/n$. Lorsqu'elle rencontre un échec pour une hauteur donnée, elle retente de sauter cette même hauteur, et une fois qu'elle y arrive, elle passe à la hauteur suivante.

1. On note $X$ la hauteur pour laquelle l'athlète rencontre son premier échec. Donner la loi de $X$, ainsi que son espérance et sa variance.
2. Pour $n \geq 1$ entier, on note $T_n$ le nombre total de sauts effectués pour atteindre la hauteur $n$. Montrer que

$$\mathbb{E}[T_n] = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

**ExoPJoueursUrne**

## Exercice 15

Soit $n \geq 1$ un entier. On considère une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$. Deux personnes, $A$ et $B$, se proposent de jouer de la façon suivante :

— le joueur $A$ verse une somme fixée $S > 0$ au joueur $B$, tire une boule uniformément au hasard puis la remet dans l'urne. On note $X$ la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule tirée ;

— le joueur $B$ tire ensuite dans l'urne, uniformément avec remise, jusqu'à ce qu'il obtienne une valeur supérieure ou égale $X$. Il verse à $A$ le montant $Y$ correspondant au nombre de tirages qu'il a dû effectuer.

1. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $k \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité que $Y$ soit supérieure ou égale à $k$ sachant que $X = i$.
2. Montrer que si $Z$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors
$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geq k)\,.$$
3. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[Y]$.
4. On suppose que $n = 6$ et $S = \frac{5}{2}$. Qui a le plus intérêt à jouer en moyenne ?

**ExoPSuiteCroissante**

## Exercice 16

Soit $n \geq 1$ un entier. Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On effectue des tirages sans remise dans l'urne tant que les numéros tirés forment une suite strictement croissante, et l'on s'arrête dès que le numéro tiré n'est pas strictement plus grand que le précédent.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X$ représentant le nombre de tirages effectués.
2. Montrer que
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k)\,.$$
3. Déterminer $\mathbb{E}[X]$ et sa limite quand $n$ tend vers $+\infty$.
4. Reprendre les questions précédentes en supposant cette fois que les boules sont tirées avec remise. Comparer les deux résultats.

**ExoPUstat**

## Exercice 17

Soit $n \geq 3$ un entier et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, possédant un moment d'ordre 2 fini. On note

$$\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[|X_1 - X_2|] = \mu\,,$$

et l'on suppose que $\sigma^2 > 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Var}(|X_1 - X_2|) = 2\sigma^2 - \mu^2$.

On considère la variable aléatoire $S_n$ définie par

$$S_n = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |X_i - X_j|\,,$$

où la somme porte sur les paires d'indices $(i, j)$ telles que $1 \leq i < j \leq n$.

2. Que vaut l'espérance de $S_n$ ?
3. Montrer que $\mathrm{Var}(S_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, puis que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}\left(|S_n - \mu| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

**ExoPGeometriquePaire**

## Exercice 18

Soit $p$ un réel tel que $0 < p < 1$. On effectue des lancers indépendants d'une pièce ayant probabilité $p$ de tomber sur « pile », et l'on s'intéresse à la variable aléatoire $X$ correspondant au temps d'arrivée du premier « pile ».

1. Quelle est la loi de $X$ ?
2. Soit $m \geq 1$ un entier. Quelle est la probabilité que $X$ soit multiple de $m$ ?
3. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ les événements « $X$ multiple de $m$ » et « $X > n$ » sont-ils indépendants ?

**ExoPPoissonDiv**

## Exercice 19

Soit $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$. Soit $N$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des $X_i$. On note

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i = \sum_{i=1}^{+\infty} X_i 1_{i \leq N}.$$

(Si $N = 0$, alors $S = 0$.)

1. Dans cette question uniquement on suppose que $N$ est une variable aléatoire de loi de poisson de paramètre $\lambda$ indépendante des $X_i$. Touver la loi du couple $(S, N - S)$. Les variables $S$ et $N - S$ sont-elles indépendantes ?
2. Soit $n \geq 1$ un entier. On suppose maintenant que $N$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.
   (a) Déterminer la loi du couple $(S, N - S)$. Quelle est la loi de $S$ ? Et celle de $N - S$ ?
   (b) Les variables $S$ et $N - S$ sont-elles indépendantes ? On pourra par exemple considérer les événement $\{S = 0\}$ et $\{N - S = 0\}$.

**ExoPPoissonMoment**

## Exercice 20

Soit $X$ une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda \geq 0$ (pour $\lambda = 0$, il s'agit d'une variable aléatoire qui vaut 0 avec probabilité 1).

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)\dots(X-k)]$.
2. En déduire une expression de la variance de $X$.
3. Calculer $\mathbb{E}[\frac{1}{X+1}]$ et $\mathbb{E}[\frac{1}{(X+1)(X+2)}]$
4. En déduire $\mathbb{E}[\frac{1}{X+2}]$
5. Pour $n \geq 1$ entier et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$, on définit la fonction $f_x : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ qui à $\lambda \geq 0$ associe la probabilité de l'événement $\bigcap_{i=1}^n \{X_i = x_i\}$, pour $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\lambda$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}^n$, la fonction $f_x$ atteint son maximum sur $\mathbb{R}^+$ en un unique point, noté $g(x)$, que l'on déterminera.
   (b) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\lambda$. Donner l'espérance et la variance de $g(X_1, \dots, X_n)$.

**ExoPEstimation**

## Exercice 21

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes réelles de même loi $\mu$ et de carrée telle que $\mathbb{E}[X_i^2] < \infty$. On souhaite estimer l'espérance de cette loi. Pour cela on introduit :

$$\hat{\theta}_n = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$$

1. Pour quels choix de réels $a_i$ a t-on $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \mathbb{E}[X_1]$ ? Pour un tel choix de réels on dira que $\hat{\theta}_n$ est sans biais.
2. Si $\hat{\theta}_n$ est sans biais, quels choix de réels $a_i$ donnent une variance de $\hat{\theta}_n$ minimale ?
3. Pour $n \geq 1$ entier et $y \in \{0, \dots, n\}$, on définit la fonction $f_y : [0,1] \to [0,1]$ qui à $p \in [0,1]$ associe la probabilité qu'une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ soit égale à $y$.
   (a) Montrer que pour tout $y \in \{0, \dots, n\}$, la fonction $f_y$ atteint son maximum sur $[0,1]$ en un unique point, noté $g(y)$, que l'on déterminera.
   (b) Soit $Y$ une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Donner l'espérance et la variance de $g(Y)$, appelé estimateur du maximum de vraisemblance.

**ExoPUrne**

## Exercice 22

Une urne contient initialement une boule rouge et une boule bleue. On effectue des tirages indépendants dans l'urne. Si la boule tirée est bleue on s'arrête, si elle est rouge on la remet et on rajoute une boule rouge supplémentaire dans l'urne. On note $X$ le nombre de tirages qu'il faut pour obtenir une boule bleue, et l'on pose $X = 0$ si l'on n'obtient jamais de boule bleue.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = 1), \mathbb{P}(X = 2), \mathbb{P}(X = 3)$.
2. Combien y a t-il de boules lors du $n$-ième tirage (s'il a lieu) ?
3. On note $A_i$ l'événement « on tire une boule bleue lors du $i$-ème tirage ». Exprimer l'événement $X > n$ en fonction des $A_i$. En déduire que $\mathbb{P}(X = 0) = 0$.
4. Calculer $\mathbb{P}(X = n)$ pour $n \geq 1$.
5. Quelle est l'espérance de $X$ ?

**ExoPEstimationtrois**

## Exercice 23

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi uniforme sur $\{1; \ldots; K\}$ où $K$ est un entier strictement positif. On souhaite estimer la somme $\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\phi(i)$ où $\phi : \{1; \ldots; K\} \to \mathbb{R}^+$. Pour cela on introduit :

$$\hat{\theta}_n = \frac{\phi(X_1) + \cdots + \phi(X_n)}{n}$$

$$\hat{\tau}_n = \frac{(\phi(X_1) + \phi(K+1-X_1)) + \cdots + (\phi(X_n) + \phi(K+1-X_n))}{2n}$$

1. Calculer l'espérance et la variance de $\hat{\theta}_n$.
2. Quelle est la loi de $K + 1 - X_i$ ?
3. Calculer l'espérance et la variance de $\hat{\tau}_n$ (pour cette dernière on pourra s'interroger sur le signe de $2\phi(x)\phi(K+1-x) - \phi(x)^2 - \phi(K+1-x)^2$)
4. Entre $\hat{\theta}_n$ et $\hat{\tau}_n$, lequel a la plus petite variance ?

**ExoPInegalite**

## Exercice 24

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi.

1. On suppose dans cette question que $X$ et $Y$ sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que
$$\mathbb{P}(|X-Y| \leq 2) \leq 5\mathbb{P}(X=Y).$$
2. Soit $C$ la plus petite constante telle que pour tout couple variable aléatoires $(X,Y)$ indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ on a :
$$\mathbb{P}(|X-Y| \leq 2) \leq C\mathbb{P}(X=Y).$$
Montrer que $3 \leq C \leq 5$. (on pourra considérer la loi uniforme sur $\{2;4;6;\ldots;2N\}$)
3. Dans cette question on ne suppose plus que $X$ et $Y$ sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Ce sont deux variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. Montrer que
$$\mathbb{P}(|X-Y| \leq 2) \leq 5\mathbb{P}(|X-Y| \leq 1).$$
(on pourra se ramener à des variables aléatoires discrètes en considérant $\lfloor X \rfloor$ et $\lfloor Y \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x$ c'est à dire l'unique entier $n$ tel que $n \leq x < n+1$).

**ExoPConcentrationA**

## Exercice 25

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ possédant un moment d'ordre 2 fini. On souhaite montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a
$$\mathbb{P}(X-\mathbb{E}[X] \leq -t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2\mathbb{E}[X^2]}\right).$$

1. Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Montrer que pour réel $\lambda > 0$, on a
$$\mathbb{P}(X-\mathbb{E}[X] \leq -t) = \mathbb{P}\left(e^{-\lambda(X-\mathbb{E}[X])} \geq e^{\lambda t}\right) \leq e^{-\lambda t}\mathbb{E}\left[e^{-\lambda(X-\mathbb{E}[X])}\right].$$
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 + x \leq e^x$. En déduire que pour tout $\lambda > 0$, on a
$$\mathbb{E}[e^{-\lambda X}] \leq 1 - \lambda\mathbb{E}[X] + \frac{\lambda^2\mathbb{E}[X^2]}{2} \leq e^{-\lambda\mathbb{E}[X] + \frac{\lambda^2\mathbb{E}[X^2]}{2}}.$$
3. Conclure en choisissant $\lambda > 0$ judicieusement.

**ExoPConcentrationB**

## Exercice 26

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans l'intervalle $[-1,1]$, centrée et d'écart-type $\sigma > 0$.

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$ et $\lambda \geq 0$, on a
$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq e^{-\lambda t}\mathbb{E}[e^{\lambda X}]\,.$$
2. Justifier que pour tout $u \in [-1,1]$, on a $e^u \leq 1 + u + u^2$, et en déduire que pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a $\mathbb{E}[e^{\lambda X}] \leq 1 + \sigma^2\lambda^2$.
3. Montrer que pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a
$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq e^{-\lambda t + \sigma^2\lambda^2}\,.$$
4. En déduire que pour tout $t \in [0, 2\sigma^2]$, on a $\mathbb{P}(X \geq t) \leq e^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}}$, puis que $\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}}$.

**ExoPOneSidedChebyshev**

## Exercice 27

Soit $X$ une variable aléatoire réelle, d'espérance $\mu$ et de variance $\sigma^2$.

1. Montrer que pour tous réels $t > 0$ et $a \geq 0$, on a
$$\mathbb{P}(X - \mu \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[(X-\mu+a)^2]}{(t+a)^2} = \frac{\sigma^2 + a^2}{(t+a)^2}\,.$$
2. En déduire que pour tout réel $t > 0$, on a
$$\mathbb{P}(X - \mu \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}\,.$$
3. On appelle *médiane* de $X$ tout réel $m$ vérifiant
$$\mathbb{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2}\,.$$
En utilisant le résultat de la question 2., montrer que
$$\mathbb{P}(X \geq \mu + \sigma) \leq \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X \leq \mu - \sigma) \leq \frac{1}{2}\,.$$
En déduire que si $m$ est une médiane de $X$, alors $|m - \mu| \leq \sigma$.

**ExoPMaxExp**

## Exercice 28

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes, toute de loi exponentielle de paramètre 1, c'est-à-dire, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X_1 \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

On note $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de $M_n$, notée $F_n$, ainsi que sa densité, notée $f_n$.
2. Vérifier que $t(1 - F_n(t))$ tend vers 0 quand $t$ tend vers $+\infty$.
3. En déduire, après une integration par parties, que
$$\mathbb{E}[M_n] = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(t))\mathrm{d}t\,.$$
4. Établir finalement que $\mathbb{E}[M_n] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
5. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\left(M_n - \ln(n) \leq t\right)$ converge quand $n \to +\infty$, vers une limite que l'on déterminera.

**ExoPSommeEntiersBernoulli**

## Exercice 29

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose $W_n = \sum_{i=1}^n iX_i$, et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $p_{n,k} = \mathbb{P}(W_n = k)$.

1. Quelle est la plus grande valeur de $W_n$ ? On notera cette valeur $s_n$.
2. Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, s_n\}$, on a $p_{n,k} > 0$.
3. Calculer l'espérance et la variance de $W_n$.
4. Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, s_n\}$, on a $p_{n,k} = p_{n,s_n - k}$.

*On donne* $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**ExoPBoules**

## Exercice 30

Dans une urne il y a 100 boules : 20 boules rouges et 80 boules bleues. On tire 15 boules sans remise et on pose pour $1 \leq i \leq 15$ :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{-ième boule est rouge} \\ 0 & \text{si la } i\text{-ième boule est bleue} \end{cases}$$

1. Quelle est la loi de $X_i$ ? Donner son espérance et sa variance.
2. Calculer $\operatorname{cov}(X_i, X_j)$ pour $i \neq j$. Les variables $X_i$ sont elles indépendantes ?
3. On pose $X$ le nombre de boules rouges tirées sur les 15 tirages. Utiliser ce qui précède pour trouver l'espérance et la variance de $X$.

**ExoPPiecedeux**

## Exercice 31

On effectue des lancers indépeendants d'une pièce équilibrée. On pose $P_n$ l'événement le $n$-ième lancer est pile, et $\bar{P}_n$ l'événement complémentaire. Soit $Y$ le rang d'apparition du premier motif (Pile, Pile, Face) (par convention $Y = 0$ si ce motif n'arrive jamais). Pour $n \geq 3$, on pose $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap \bar{P}_n$, et $U_n = \bigcup_{k=3}^{n} B_k$. On définit la suite $u$ par $u_0 = u_1 = u_2 = 0$ et pour $n \geqslant 3$, $u_n = \mathbb{P}(U_n)$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 3$, l'événement $B_{n+2}$ est disjoint de $B_{n+1}$ et de $B_n$ pour $n \geqslant 4$.
2. Calculer $u_3$, $u_4$, $u_5$.
3. Montrer que $U_n \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1}$ et en déduire $\mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1})$ en fonction de $u_{n-2}$.
4. Montrer que la suite $u$ vérifie la relation de récurrence :
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).$$
5. Trouver la limite des $u_n$ et calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$.

**ExoPPPPc**

## Exercice 32

Non Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, toutes de loi uniforme sur $[0, \theta]$ où $\theta$ est un réel strictement positif. On pose $T_n = 2\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ et $S_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Calculer $\mathbb{E}(T_n)$ et $\mathbb{E}(S_n)$.
2. Calculer $\mathrm{Var}(T_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$.
3. On cherche à estimer $\theta$. On appelle *risque quadratique* d'un estimateur $R_n$ la quantité $\mathbb{E}[(R_n - \theta)^2]$ et l'on dira qu'un estimateur est « meilleur » qu'un autre si son risque quadratique est plus petit. Entre $T_n$ et $S_n$, quel estimateur choisiriez-vous ?

**ExoPUrneNumerosInferieurs**

## Exercice 33

Soit $n \geq 2$ un entier. Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$.

1. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. On tire $k$ boules d'un coup dans l'urne, et l'on note $I_1 < \cdots < I_k$ les numéros obtenus classés par ordre croissant. Déterminer, pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$ et tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la probabilité que $I_j$ soit égal à $i$.
2. En déduire l'identité :
$$\sum_{i=1}^{n} \binom{i-1}{j-1}\binom{n-i}{k-j} = \binom{n}{k}.$$
3. On reprend notre urne avec sa composition initiale ($n$ boules numérotées). On enlève au hasard une boule de l'urne, et l'on note $I$ le numéro de cette boule. Puis, pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on tire $k-1$ boules d'un coup, et l'on note $Y$ le nombre de boules, parmi ces $k-1$ boules, qui ont un numéro strictement plus petit que $I$.
   (a) Quelle est la loi de $Y$ ?
   (b) Déterminer, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la probabilité que $I = i$ sachant que $Y = k-1$. Pour quelles valeurs de $i$ cette probabilité est-elle maximale ?

**ExoPParkingGeom**

## Exercice 34

Dans une rue (très longue) les maisons sont numérotées par les entiers positifs ou nuls. Devant chaque numéro il y a une unique place de parking et chaque place est occupée avec probabilité $\frac{3}{4}$ indépendamment les unes des autres. On entre dans la rue à partir du numéro 0 et l'on souhaite se garer au plus près du numéro 100, sans faire de marche arrière. Pour ce faire, on utilise la stratégie suivante. On choisit un entier $k \in \{0, \dots, 100\}$, on avance dans la rue et à partir du numéro $100 - k$, on prend la première place libre. Ainsi la voiture prend la première place libre parmi $\{100 - k, 100 - k + 1, \dots\}$.
On note $X_k$ la place prise et $\Delta_k = \mathbb{E}[|X_k - 100|]$ la distance moyenne entre $X_k$ et 100. On aimerait choisir $k \in \{0, \dots, 100\}$ tel qu'en moyenne cette distance soit minimale.

1. Quelle est la loi de $1 + X_k - (100 - k)$ ?
2. Que vaut $\Delta_0$ ?
3. En utilisant l'événement $A_k$ : «la place $100 - k$ est occupée» montrez que si $1 \leq k \leq 100$
$$X_k = 1_{A_k} X_{k-1} + 1_{\bar{A}_k}(100 - k).$$
En déduire une relation entre $\Delta_k$ et $\Delta_{k-1}$.
4. Trouver deux réels $a$ et $b$ ne dépendant pas de $k$ tels qu'en posant $u_k = \Delta_k + ak + b$, alors pour tout $1 \leq k \leq 100$, $u_k = \frac{3}{4} u_{k-1}$.
5. Donner une expression de $\Delta_k$.
6. Vaut-il mieux choisir $k = 0$, $k = 1$ ou $k = 2$ ?

**ExoPRuine**

## Exercice 35

Deux joueurs $A$ et $B$ s'affrontent. Au début les scores sont nuls des deux côtés. À chaque partie, celui qui gagne marque un point. Les parties sont indépendantes et la probabilité que $A$ gagne une partie est $p$ avec $0 < p \leq \frac{1}{2}$ (et sinon $B$ gagne avec probabilité $1 - p$). Dès que l'un a deux points de plus que l'autre on arrête le jeu et celui qui a le plus de points est déclaré vainqueur. On note $G_A$ l'événement « le joueur $A$ finit par remporter le jeu ».

1. **Calcul de la probabilité de $G_A$**
   (a) En considérant un système complet d'événements prenant en compte les résultats des deux premiers échanges, justifier l'identité :
   $$\mathbb{P}(G_A) = p^2 + 2p(1 - p)\mathbb{P}(G_A).$$
   En déduire la valeur de $\mathbb{P}(G_A)$ en fonction de $p$.
   (b) Déterminer la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais.
2. **Loi du nombre de parties qui ont lieu pour qu'il y ait un gagnant**
   Soit $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de parties qui ont lieu pour qu'il y ait un gagnant.
   On choisit arbitrairement d'attribuer à $Y$ la valeur 0 quand le jeu ne se termine jamais.
   (a) Calculer, pour tout entier naturel non nul $k$, la probabilité $\mathbb{P}(Y = 2k)$.
   (b) Justifier que la variable aléatoire $Y$ admet une espérance et la calculer.

**ExoPRecurrence**

## Exercice 36

On pose $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ des variables aléatoires réelles indépendante et de même loi. On suppose qu'elles sont d'espérance $\mathbb{E}[X_i] = m \in \mathbb{R}$ et de variance finie $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$.

1. On pose $Y_0 = 0$ et par récurrence pour $n \geqslant 1$ :

$$Y_n = aY_{n-1} + X_n$$

   . Calculer l'espérance et la variance de $Y_n$ (on pourra chercher une expression qui donne directement l'expression de $Y_n$ en fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

2. On pose $Z_0 = 0$ et par récurrence pour $n \geqslant 1$ :

$$Z_n = X_n Z_{n-1} + 1$$

   .

   (a) Chercher une relation entre l'espérance de $Z_n$ et l'espérance de $Z_{n-1}$.

   (b) Si $m = 1$ calculer l'espérance de $Z_n$.

   (c) Si $m \neq 1$ trouver un réel $x$ tel que $\mathbb{E}[Z_n] - x$ soit une suite géométrique. En déduire une expression de $\mathbb{E}[Z_n]$.

   (d) Si $m = 0$ et $\sigma = 1$ calculer la variance de $Z_n$

**ExoPSym**

## Exercice 37

On dit que $X$ une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{Z}$ a une loi symétrique si pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z = -k)$$

1. Soient $X, Y$ deux variables aléatoires indépendante de loi géométrique de paramètre $p$. On pose $Z = X - Y$. Quel est la loi de $Z$ ? Est ce une loi symétrique ?
2. Si $Z$ a une loi symétrique et que son espérance est bien définie, que vaut son espérance ?
3. Montrer plus généralement que si $X$ et $Y$ ont même loi à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et sont indépendants alors $X - Y$ a une loi symétrique.
4. Soit $Z$ tel que $\mathbb{P}(Z = -1) = \mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2}$. Est ce qu'il existe $X, Y$ de même loi sur $\mathbb{Z}$ indépendants tels que $X - Y$ a même loi que $Z$ ?

**ExoPHHHT**

## Exercice 38

On considère une suite de jets indépendants de pièces équilibrées. On note $X_n = 1$ si le $n$ ième jet donne Face et $X_n = 0$ sinon.

1. On note $T_F$ le temps d'apparition de Face pour la première fois. $T_F = \inf\{n \geqslant 1 : X_n = 1\}$. Quelle est la loi de $T_F$ ? quelle est son espérance ?
2. On note $T_{FP}$ le temps d'apparition de la première fois où Pile apparaît juste après Face. $T_{FP} = \inf\{n \geqslant 1 : X_{n-1} = 1, X_n = 0\}$. Quelle est la loi de $T_{FP}$ ? quelle est son espérance ? (On pourra s'intéresser à la variable $T_{FP} - T_F$).
3. On note $T_{FF}$ le temps d'apparition de la première fois où Face apparaît deux fois d'affilés. En considérant le résultat de la première pièce après $T_F$ le premier Face donner une intuition de la formule
$$\mathbb{E}[T_{FF} - T_F] = 1 + \frac{1}{2}(1 + \mathbb{E}[T_{FF}])$$
Qui a la plus grande espérance $T_{FF}$ ou $T_{FP}$ ?
4. Calculer $\mathbb{P}(T_{FP} < T_{FF})$ la proba qu'on voit apparaitre Face/Pile d'affilé avant Face/Face d'affilé.

**ExoPSommeExpVariance**

## Exercice 39

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes. On suppose que pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, $X_i$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_i > 0$, c'est-à-dire de densité $f_i$ donnée par

$$f_i(x) = \lambda_i \exp(-\lambda_i x) \quad \text{pour } x \in [0, \infty[.$$

On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1. Calculer l'espérance et la variance de $S_n$ en fonction des $\lambda_i$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $\mathbb{E}(S_n) = a$. Déterminer la valeur des $\lambda_i$ pour que la variance de $S_n$ soit minimale sous cette contrainte. (on pourra par exemple regarder d'abord le cas $n = 2$ puis procéder par récurrence).

**ExoPAAlancerPleinPieces**

## Exercice 40

Soit $n$ un entier et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements indépendants tels que, pour tout $k \leq n$,

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{2k}.$$

On note $E_n$ l'événement "Au moins un $A_i$ est réalisé".

1. Calculer $\mathbb{P}(E_n)$.
2. Montrer l'inégalité $1 - x \leq \exp(-x)$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que
$$\mathbb{P}(E_n) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\right).$$
3. Quelle est la limite de $\mathbb{P}(E_n)$ ?

**ExoPsymetrie**

## Exercice 41

Soit $X$ une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont la variance $\sigma^2$ existe et est non nulle. On suppose que $X$ est symétrique, c'est-à-dire que $X$ et $-X$ ont même loi de probabilité.

1. Calculer l'espérance de $X$.
2. On définit les variables $U$, $V$, et $Y$ par les conditions
$$U(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ X(\omega) \geq 0 \\ 0 & si\ X(\omega) < 0 \end{cases} \quad V(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ X(\omega) \leq 0 \\ 0 & si\ X(\omega) > 0 \end{cases} \quad \text{et } Y = U - V.$$
   (a) Montrer que la variable $Y$ est symétrique.
   (b) On suppose que $P(X = 0) = 0$ et on note $|X|$ la valeur absolue de $X$. Montrer que les variables $Y$ et $|X|$ sont indépendantes.

**ExoPProduitIID**

## Exercice 42

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

1. Dans cette question, $X_1$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0, 1[$.
   (a) Déterminer $Y_n(\Omega)$ et l'espérance de $Y_n$.
   (b) Déterminer la loi de $Y_n$.
   (c) Les variables aléatoires $Y_n$ et $Y_{n+1}$ sont-elles indépendantes ?
   (d) Soit $k \in Y_n(\Omega)$, montrer que $\mathbb{P}(Y_n = k)$ converge vers $\mathbb{P}(Y = k)$ pour $Y$ une variable aléatoire que l'on précisera.
2. Dans cette question, $X_1$ est définie par $P(X_1 = 1) = p \in ]0, 1[$ et $P(X_1 = -1) = 1 - p$. Reprendre les questions (a) à (d).

**ExoPProduitDep**

## Exercice 43

Soit $X_0$ la variable aléatoire certaine égale à 1 et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0,1[$ . On définit deux suites de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $X_n = Y_n X_{n-1}$ et $Z_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

1. Les variables aléatoires $X_n$ et $X_{n+1}$ sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer la loi de $Z_n$.
3. Les variables aléatoires $Z_n$ et $Z_{n+1}$ sont-elles indépendantes ?
4. Soit $k \in Z_n(\Omega)$, montrer que $\mathbb{P}(Z_n = k)$ converge vers $\mathbb{P}(Z = k)$ pour $Z$ une variable aléatoire que l'on précisera.

**ExoPEstimationComp**

## Exercice 44

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoires indépendantes de même loi avec $E(X_1) = \mu$ et $V(X_1) = \sigma^2$. On dispose de deux quantités, appelées estimateurs de $\mu$ :

$$T_1(X_1, \ldots, X_n) = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad \text{et} \quad T_2(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{X_1 - X_2}{2}.$$

On cherche lequel est le meilleur de ces deux estimateurs, en un certain sens.

1. Calculer l'espérance et la variance de $T_1$.
2. Calculer l'espérance et la variance de $T_2$.
3. Entre $T_1$ et $T_2$, lequel a la plus petite variance ?

**ExoPdensiteracine**

## Exercice 45

Soit $f$ la fonction réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifiez que $f$ est une densité de probabilité.
2. Soit $X$ de densité $f$ et de $Y = \sqrt{X}$. Justifier que $Y$ est bien définie et déterminer sa loi.
3. Calculer les espérances puis les variances de $X$ et $Y$.

**PProbabilitHoeffding**

## Exercice 46

On suppose

1. Soit $X$ une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=-1)=\frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda X)]\leq e^{C\lambda^2}$$

(Indication : on pourra d'abord montrer que c'est vrai pour un bon choix de $C$ pour $|\lambda|>1$, puis que c'est vrai pour un (autre) bon choix de $C$ pour $|\lambda|>\varepsilon$ pour un $\varepsilon>0$, et sinon faire une étude de fonction en 0).

2. Soit $Y$ une variable aléatoire dans $\mathbb{Z}\cap[-K;K]$ telle que $\mathbb{E}[Y]=0$. Montrer qu'il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda Y)]\leq e^{Ct^2}$$

(Indication : même indication qu'à la question précédente).

3. Soient $Y_1,\dots,Y_n$ des variables indépendantes avec la même loi que le $Y$ de la question 2. Montrer que pour $t,\lambda>0$

$$\mathbb{P}(\frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n}>t)\leq e^{-n(\lambda t-C\lambda^2)}$$

En déduire

$$\mathbb{P}(\frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n}>t)\leq e^{-n\frac{Ct^2}{4}}$$

**PProbabilitgeomgen**

## Exercice 47

Si $X$ est une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$ on note pour $0\leq s\leq 1$

$$g_X(s)=\mathbb{E}[s^X]=\sum_{k\in\mathbb{N}}s^k\mathbb{P}(X=k)$$

1. Si $X$ et $Y$ sont indépendants et à valeur dans $\mathbb{N}$, que vaut $g_{X+Y}$ ?
2. Si $X$ a pour loi la loi géométrique de paramètre $p$, que vaut $g_X$ ?
3. Si $X_1,X_2,\dots,X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre $p$, montrer que

$$\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_n=k)=\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$$

4. Calculer pour $0\leq z<1$,

$$f_k(z)=\sum_{n\geqslant k}\binom{n}{k}z^n$$

**Autre**

## Exercice 48

entropie Ehrenfest estimateur hypergéometrique symétrisation HardyWeinberg Ehrenfest Fourmis

Troisième partie

# Planches

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

## Planche 1

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

### Exercice 1

Si $X$ est une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$ on note pour $0 \leq s \leq 1$

$$g_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k\in\mathbb{N}} s^k \mathbb{P}(X=k)$$

1. Si $X$ et $Y$ sont indépendants et à valeur dans $\mathbb{N}$, que vaut $g_{X+Y}$ ?
2. Si $X$ a pour loi la loi géométrique de paramètre $p$, que vaut $g_X$ ?
3. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre $p$, montrer que

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n = k) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

4. Calculer pour $0 \leq z < 1$,

$$f_k(z) = \sum_{n \geqslant k} \binom{n}{k} z^n$$

### Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée, et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-\frac{x}{a_n}} \frac{1}{a_n} \mathrm{d}x\,.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n$ est convergente.
2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $M > 0$, on a

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(0) e^{-u} \mathrm{d}u + \int_0^M \left(f(a_n u) - f(0)\right) e^{-u} \mathrm{d}u + \int_M^{+\infty} \left(f(a_n u) - f(0)\right) e^{-u} \mathrm{d}u\,.$$

3. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on calculera.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 2

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

On suppose

1. Soit $X$ une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda X)] \leq e^{C\lambda^2}$$

(Indication : on pourra d'abord montrer que c'est vrai pour un bon choix de $C$ pour $|\lambda| > 1$, puis que c'est vrai pour un (autre) bon choix de $C$ pour $|\lambda| > \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$, et sinon faire une étude de fonction en 0).

2. Soit $Y$ une variable aléatoire dans $\mathbb{Z} \cap [-K; K]$ telle que $\mathbb{E}[Y] = 0$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda Y)] \leq e^{Ct^2}$$

(Indication : même indication qu'à la question précédente).

3. Soient $Y_1, \dots, Y_n$ des variables indépendantes avec la même loi que le $Y$ de la question 2. Montrer que pour $t, \lambda > 0$

$$\mathbb{P}(\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} > t) \leq e^{-n(\lambda t - C\lambda^2)}$$

En déduire

$$\mathbb{P}(\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} > t) \leq e^{-n\frac{Ct^2}{4}}$$

## Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_1^\infty \frac{1}{x^n(1+x)} \mathrm{d}x.$$

1. Vérifier que $I_n$ est bien définie pour $n \geq 1$. Montrer que $I_1 = \ln(2)$
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ décroît.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.
4. Calculer $I_{n+1} + I_n$. En déduire $(-1)^n I_n = \ln(2) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.
5. En déduire la valeur de la limite $\lim_{n\geq+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 3

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

On considère une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$, et on effectue deux tirages avec remise dans cette urne. On note $X$ le numéro de la première boule extraite et $Y$ le numéro de la seconde. On note également $U = \min(X, Y)$ le plus petit des deux numéros tirés et $V = \max(X, Y)$ le plus grand.

1. Donner la loi de $U$ et la loi de $V$ .
2. Calculer l'espérance et la variance de $U$ et $V$ .
3. Déterminer une relation liant $X, Y, U$ et $V$ . En déduire $\mathrm{Var}(U + V)$, puis le coefficient de corrélation linéaire de $U$ et $V$ .
4. Pour $k \in [\![2, 2n]\!]$, déterminer $\mathbb{P}(X + Y = k)$. On pourra distinguer les cas $k \leq n$ et $k > n$.

## Exercice 2

Soit $f_{\alpha,\beta}(x) = |\sin(x)|^{\alpha}|t|^{\beta}$ où $\alpha, \beta$ sont des réels non nécessairement positifs.

1. Pour quels valeurs de $\alpha, \beta$ réels est ce que l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{\alpha,\beta}(x)dx$ est convergente ?
2. Pour quels valeurs de $\alpha, \beta$ réels est ce que l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f_{\alpha,\beta}(x)dx$ est convergente ?
3. Montrer qu'il existe une certaine constante $C > 0$ telle que pour tout $\alpha, k,\ k \in \mathbb{N}^*$
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f_{\alpha,\beta}(x)dx \geqslant \frac{C}{k}$$
.
4. Pour quels valeurs de $\alpha, \beta$ réels est ce que l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} f_{\alpha,\beta}(x)dx$ est convergente ?
5. Pour quels valeurs de $\alpha, \beta$ réels est ce que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha,\beta}(x)dx$ est convergente ?

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 4

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Une athlète tente de franchir les hauteurs successives $1, 2, \ldots, n \ldots$ On suppose les sauts indépendants et que la probabilité de réussir à franchir la hauteur $n \in \mathbb{N}^*$ est égale à $1/n$. Lorsqu'elle rencontre un échec pour une hauteur donnée, elle retente de sauter cette même hauteur, et une fois qu'elle y arrive, elle passe à la hauteur suivante.

1. On note $X$ la hauteur pour laquelle l'athlète rencontre son premier échec. Donner la loi de $X$, ainsi que son espérance et sa variance.
2. Pour $n \geq 1$ entier, on note $T_n$ le nombre total de sauts effectués pour atteindre la hauteur $n$. Montrer que

$$\mathbb{E}[T_n] = \frac{n(n+1)}{2}.$$

## Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 0$, on considère les intégrales

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$$

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$$

pour $\sigma \in \mathbb{R}$.

1. Trouver un lien entre $I_n$ et $J_n$ au moyen d'un changement de variable $x \to 1/x$.
2. Que vaut $I_n + J_n$ ?
3. Calculer $I_n$ et $J_n$.
4. Quelle est la limite lorsque $n$ tend vers l'infini de $\int_1^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$ ?

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 5

Vous présenterez ces <u>deux</u> exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soit $a > 0$ et soit $f_a : t \mapsto \begin{cases} at^{-a-1} & t \in [1, +\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que $f_a$ est une densité.
2. Soit $X$ une variable aléatoire admettant $f_a$ pour densité.
   (a) Déterminer la fonction de répartition $F_X$ de $X$.
   (b) X possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer. Même question pour la variance.
   (c) On pose $Y = \ln X$. Déterminer la fonction de répartition de $Y$, puis reconnaître la loi de $Y$.

## Exercice 2

Soit $h(x) = x + exp(x)$ Soit $f(x, y) = x + y + \exp(x) + \exp(y) = h(x) + h(y)$

1. Montrer que $h$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans un intervalle qu'on précisera et que sa réciproque est $h^{-1}$ est dérivable.
2. Montrer que pour tout $x$ il existe une unique solution $y$ à l'équation $f(x, y) = 2$. On appelle cette solution $y(x)$.
3. Étudiez les variations de $y(x)$ et sa limite en $+\infty$ et $-\infty$. Calculez $y(0)$.
4. Calculer la limite de $\frac{y(x)-y(0)}{x}$ lorsque $x$ tend vers 0.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 6

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Dans une urne il y a 100 boules : 20 boules rouges et 80 boules bleues. On tire 15 boules sans remise et on pose pour $1 \leq i \leq 15$ :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{-ième boule est rouge} \\ 0 & \text{si la } i\text{-ième boule est bleue} \end{cases}$$

1. Quelle est la loi de $X_i$ ? Donner son espérance et sa variance.
2. Calculer $\text{cov}(X_i, X_j)$ pour $i \neq j$. Les variables $X_i$ sont elles indépendantes ?
3. On pose $X$ le nombre de boules rouges tirées sur les 15 tirages. Utiliser ce qui précède pour trouver l'espérance et la variance de $X$.

## Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ est convergente. Soit $g$ la fonction

$$g(x) = \begin{cases} f(x - \frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Étudiez la fonction $\phi(x) = x + \frac{1}{x}$ (domaine de définition, sens de variation, limites au bord du domaine de définition, graphe)
2. Montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ est une intégrale convergente (on pourra utiliser le changement de variable $x \to \phi(x)$ sur un intervalle correctement choisit)
3. Montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$
4. Est ce que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}dx$ est convergente ? Si oui quelle est sa valeur ?

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 7

Vous présenterez ces <u>deux</u> exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soit $X$ une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont la variance $\sigma^2$ existe et est non nulle. On suppose que $X$ est symétrique, c'est-à-dire que $X$ et $-X$ ont même loi de probabilité.

1. Calculer l'espérance de $X$.
2. On définit les variables $U$, $V$, et $Y$ par les conditions

$$U(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ X(\omega) \geq 0 \\ 0 & si\ X(\omega) < 0 \end{cases} \quad V(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ X(\omega) \leq 0 \\ 0 & si\ X(\omega) > 0 \end{cases} \quad \text{et } Y = U - V.$$

   (a) Montrer que la variable $Y$ est symétrique.
   (b) On suppose que $P(X = 0) = 0$ et on note $|X|$ la valeur absolue de $X$. Montrer que les variables $Y$ et $|X|$ sont indépendantes.

## Exercice 2

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\, dx$.

1. Montrer que $u_n$ est bien définie.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente. Déterminer sa limite notée $\ell$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, donner un développement limité simple de $u_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.
4. Montrer qu'il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que à l'infini, on a :

$$u_n = \ell + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

## Planche 8

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

### Exercice 1

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

1. Dans cette question, $X_1$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0,1[$.
   (a) Déterminer $Y_n(\Omega)$ et l'espérance de $Y_n$.
   (b) Déterminer la loi de $Y_n$.
   (c) Les variables aléatoires $Y_n$ et $Y_{n+1}$ sont-elles indépendantes ?
   (d) Soit $k \in Y_n(\Omega)$, montrer que $\mathbb{P}(Y_n = k)$ converge vers $\mathbb{P}(Y = k)$ pour $Y$ une variable aléatoire que l'on précisera.
2. Dans cette question, $X_1$ est définie par $P(X_1 = 1) = p \in\ ]0,1[$ et $P(X_1 = -1) = 1-p$. Reprendre les questions (a) à (d).

### Exercice 2

On définit pour tout $x \in ]0;+\infty[$ l'intégrale $I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

1. Montrer que $I(x)$ existe pour tout $x \in ]0;+\infty[$.
2. On note, pour tout $x \in ]0;1]$ $J(x) = \int_x^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt$. Montrer que
$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt + J(x) = -\ln x.$$
3. Établir que l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt$ converge.
4. À l'aide de $J(x)$, montrer que $I(x) \sim -\ln x$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 9

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoires indépendantes de même loi avec $E(X_1) = \mu$ et $V(X_1) = \sigma^2$. On dispose de deux quantités, appelées estimateurs de $\mu$ :

$$T_1(X_1, \dots, X_n) = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad \text{et} \quad T_2(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{X_1 - X_2}{2}.$$

On cherche lequel est le meilleur de ces deux estimateurs, en un certain sens.

1. Calculer l'espérance et la variance de $T_1$.
2. Calculer l'espérance et la variance de $T_2$.
3. Entre $T_1$ et $T_2$, lequel a la plus petite variance ?

## Exercice 2

Soit $g$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

où $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\int_0^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t < +\infty$.

1. Étudier le prolongement par continuité de $g$ en 0.
2. Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $g(x)$ pour $x > 0$.
3. Pour $0 < a < b$, montrer que

$$\int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t = 2\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t + ag^2(a) - bg^2(b)$$

puis, à l'aide de l'inégalité (admise) $\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t}$, montrer que

$$\sqrt{\int_a^{+\infty} g^2(t)\mathrm{d}t} \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2(t)dt}$$

4. Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^2(t)\mathrm{d}t$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 10

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soit $f$ la fonction réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifiez que $f$ est une densité de probabilité.
2. Soit $X$ de densité $f$ et de $Y = \sqrt{X}$. Justifier que $Y$ est bien définie et déterminer sa loi.
3. Calculer les espérances puis les variances de $X$ et $Y$.

## Exercice 2

Soient $0 < a < b$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$$

1. En étudiant d'abord $(\log u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $v_n = n^\alpha u_n$. En étudiant $(v_n)_{n\geq 1}$, montrer qu'il existe $A > 0$ tel que en $+\infty$

$$u_n = \frac{A}{n^{b-a}} + o\left(\frac{1}{n^{b-a}}\right).$$

3. On suppose $b - a > 1$ . À l'aide d'un téléscopage bien écrit, donner la valeur de la somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 11

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soit $X_0$ la variable aléatoire certaine égale à 1 et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0,1[$ . On définit deux suites de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $X_n = Y_n X_{n-1}$ et $Z_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

1. Les variables aléatoires $X_n$ et $X_{n+1}$ sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer la loi de $Z_n$.
3. Les variables aléatoires $Z_n$ et $Z_{n+1}$ sont-elles indépendantes ?
4. Soit $k \in Z_n(\Omega)$, montrer que $\mathbb{P}(Z_n = k)$ converge vers $\mathbb{P}(Z = k)$ pour $Z$ une variable aléatoire que l'on précisera.

## Exercice 2

Soit $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ existe et que $u_n > 0$.
2. Montrer, grâce à une intégration par parties : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1})$. En déduire :

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right).$$

3. Montrer que $u_n \longrightarrow 0$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 12

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi.

1. On suppose dans cette question que $X$ et $Y$ sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que
$$\mathbb{P}(|X-Y| \leq 2) \leq 5\mathbb{P}(X=Y).$$
2. Soit $C$ la plus petite constante telle que pour tout couple variable aléatoires $(X,Y)$ indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ on a :
$$\mathbb{P}(|X-Y| \leq 2) \leq C\mathbb{P}(X=Y).$$
Montrer que $3 \leq C \leq 5$. (on pourra considérer la loi uniforme sur $\{2;4;6;\ldots;2N\}$)
3. Dans cette question on ne suppose plus que $X$ et $Y$ sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Ce sont deux variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. Montrer que
$$\mathbb{P}(|X-Y| \leq 2) \leq 5\mathbb{P}(|X-Y| \leq 1).$$
(on pourra se ramener à des variables aléatoires discrètes en considérant $\lfloor X \rfloor$ et $\lfloor Y \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x$ c'est à dire l'unique entier $n$ tel que $n \leq x < n+1$).

## Exercice 2

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que

(i) il existe $M$ un réel positif tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $|\sum_{n=0}^{N} a_n| \leq M$,

(ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.$$
2. En déduire que $\sum_0^N a_n b_n$ converge lorsque $N$ tend vers l'infini.
3. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 13

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

On effectue des lancers indépeendants d'une pièce équilibrée. On pose $P_n$ l'événement le $n$-ième lancer est pile, et $\bar{P}_n$ l'événement complémentaire. Soit $Y$ le rang d'apparition du premier motif (Pile, Pile, Face) (par convention $Y = 0$ si ce motif n'arrive jamais). Pour $n \geq 3$, on pose $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap \bar{P}_n$, et $U_n = \bigcup_{k=3}^{n} B_k$. On définit la suite $u$ par $u_0 = u_1 = u_2 = 0$ et pour $n \geqslant 3$, $u_n = \mathbb{P}(U_n)$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 3$, l'événement $B_{n+2}$ est disjoint de $B_{n+1}$ et de $B_n$ pour $n \geqslant 4$.
2. Calculer $u_3$, $u_4$, $u_5$.
3. Montrer que $U_n \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1}$ et en déduire $\mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1})$ en fonction de $u_{n-2}$.
4. Montrer que la suite $u$ vérifie la relation de récurrence :
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).$$
5. Trouver la limite des $u_n$ et calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$.

## Exercice 2

Soit $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante telle que son intégrale sur $\mathbb{R}$ est convergente.

1. Pour tout $x \geq 1$, donner un encadrement de $f(x)$ à partir d'intégrale de $f$.
2. En déduire que $f$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
3. Par une méthode similaire, montrer que $x \mapsto xf(x)$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
4. Donner un exemple de fonction $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que son intégrale sur $\mathbb{R}$ est convergente qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

## Planche 14

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

### Exercice 1

Soit $n \geq 1$ un entier. On considère une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$. Deux personnes, $A$ et $B$, se proposent de jouer de la façon suivante :

— le joueur $A$ verse une somme fixée $S > 0$ au joueur $B$, tire une boule uniformément au hasard puis la remet dans l'urne. On note $X$ la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule tirée ;

— le joueur $B$ tire ensuite dans l'urne, uniformément avec remise, jusqu'à ce qu'il obtienne une valeur supérieure ou égale $X$. Il verse à $A$ le montant $Y$ correspondant au nombre de tirages qu'il a dû effectuer.

1. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $k \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité que $Y$ soit supérieure ou égale à $k$ sachant que $X = i$.
2. Montrer que si $Z$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geq k)\,.$$

3. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[Y]$.
4. On suppose que $n = 6$ et $S = \frac{5}{2}$. Qui a le plus intérêt à jouer en moyenne ?

### Exercice 2

Soient $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ des réels fixés.

1. Montrer que pour tout réel $b > a_p$ il existe un unique réel $x_b > 0$ tel que

$$a_1^{x_b} + \cdots + a_p^{x_b} = b^{x_b}$$

(indication : commencer par regarder le cas $b = 1$).

2. Pour $b < b'$, comparer $x_b$ et $x_{b'}$.
3. Chercher $\lim_{b \to +\infty} x_b$ puis en déduire $\lim_{b \to +\infty} x_b \ln b$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 15

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soit $n \geq 1$ un entier. Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On effectue des tirages sans remise dans l'urne tant que les numéros tirés forment une suite strictement croissante, et l'on s'arrête dès que le numéro tiré n'est pas strictement plus grand que le précédent.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X$ représentant le nombre de tirages effectués.
2. Montrer que
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k)\,.$$
3. Déterminer $\mathbb{E}[X]$ et sa limite quand $n$ tend vers $+\infty$.
4. Reprendre les questions précédentes en supposant cette fois que les boules sont tirées avec remise. Comparer les deux résultats.

## Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x, y$ réels on a

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$$

On suppose de plus que $f(0) = 0$ et que $f(1) > 1$. On pose $x_0 = 1$ et on définit par récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$.

1. Montrer que $f$ est injective.
2. Montrer que $f$ est une bijection croissante.
3. Montrer que la suite définie par $y_n = x_{n+1} - x_n$ est croissante.
4. En déduire la limite de $x_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.
5. Le résultat reste-t-il vrai sans l'hypothèse $f(1) > 1$ ?

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 16

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soit $n \geq 1$ un entier. Une machine à laver contient $n$ paires de chaussettes distinctes. On sort les chaussettes une à une, uniformément et sans remise. On s'intéresse à la variable aléatoire $T$ égale au nombre de tirages effectués pour pouvoir former la première paire de chaussettes.

1. Montrer que $T$ prend ses valeurs dans $\{2, \ldots, n+1\}$, et déterminer, pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n\}$, la probabilité $\mathbb{P}(T > k)$.
2. Vérifier l'égalité $\mathbb{E}[T] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(T > k)$, et montrer que

$$\mathbb{E}[T] = \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \cdot$$

   On pourra utiliser la formule suivante que l'on admettra :

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{\binom{k}{n}}{2^k} = 1\,.$$

## Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par la donnée de $u_1 \geq 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n} \cdot$$

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$.
2. Dans le cas particulier où $u_1 = 1$, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $u_n$.

On suppose désormais que $u_1 > 1$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n > n$. On pourra vérifier que

$$u_{n+1} - (n+1) = \frac{1}{u_n}\left(u_n^2 - (n+1)u_n + n\right)\,,$$

   et chercher à factoriser cette expression.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_n = u_n - n$.
   (a) Etudier les variations de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et montrer qu'elle converge.
   (b) En déduire que $\frac{u_n}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 17

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soit $p \in ]0,1[$ et soit $(X,Y)$ un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est donnée par

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}([X=n] \cap [Y=k]) = \begin{cases} \lambda(1-p)^k \text{si } k \geq n \\ 0 \qquad \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de $\lambda$.
2. Déterminer les lois de $X$ et $Y$. Quelle est la loi de $X+1$ ? En déduire l'espérance et la variance de $X$.
3. Montrer que $X$ et $Y-X$ suivent la même loi.
4. Montrer que $X$ et $Y-X$ sont indépendantes. En déduire $\mathrm{Cov}(X,Y)$. $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

## Exercice 2

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et, pour tout entier $n \geq 1$, soit $f_n$ la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe

$$f_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x - a_0 \, .$$

1. Pour $n \geq 1$ entier, montrer qu'il existe un unique élément $x \in ]0,+\infty[$ tel que $f_n(x) = 0$. On le note $x_n$.
2. Etudier la monotonie et la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.
3. On considère maitnenant le cas où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n+1$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $x_n \leq \frac{1}{2}$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$. On pourra introduire la fonction $g_n$ définie par

$$\forall x \in [0,+\infty[\, , \; g_n(x) = x^{n+1} + x^n + \cdots + x + 1 \, .$$

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 18

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes réelles de même loi $\mu$ et de carrée telle que $\mathbb{E}[X_i^2] < \infty$. On souhaite estimer l'espérance de cette loi. Pour cela on introduit :

$$\hat{\theta}_n = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$$

1. Pour quels choix de réels $a_i$ a t-on $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \mathbb{E}[X_1]$ ? Pour un tel choix de réels on dira que $\hat{\theta}_n$ est sans biais.
2. Si $\hat{\theta}_n$ est sans biais, quels choix de réels $a_i$ donnent une variance de $\hat{\theta}_n$ minimale ?
3. Pour $n \geq 1$ entier et $y \in \{0, \dots, n\}$, on définit la fonction $f_y : [0,1] \to [0,1]$ qui à $p \in [0,1]$ associe la probabilité qu'une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ soit égale à $y$.
   (a) Montrer que pour tout $y \in \{0, \dots, n\}$, la fonction $f_y$ atteint son maximum sur $[0,1]$ en un unique point, noté $g(y)$, que l'on déterminera.
   (b) Soit $Y$ une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Donner l'espérance et la variance de $g(Y)$, appelé estimateur du maximum de vraisemblance.

## Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 0$, on considère l'intégrale

$$I_n(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x$$

pour $\sigma \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de $\alpha$ et $n$ l'intégrale $I_n(\alpha)$ est-elle finie ? On supposera qu'on se trouve dans ce cas dans le reste de l'exercice.
2. Calculer $I_0(\sigma)$.
3. Trouver une relation de récurence sur $I_n(\alpha)$.
4. En déduire une expression pour $I_n(\alpha)$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 19

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi uniforme sur $\{1; \dots; K\}$ où $K$ est un entier strictement positif. On souhaite estimer la somme $\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\phi(i)$ où $\phi : \{1; \dots; K\} \to \mathbb{R}^+$. Pour cela on introduit :

$$\hat{\theta}_n = \frac{\phi(X_1) + \cdots + \phi(X_n)}{n}$$

$$\hat{\tau}_n = \frac{(\phi(X_1) + \phi(K+1-X_1)) + \cdots + (\phi(X_n) + \phi(K+1-X_n))}{2n}$$

1. Calculer l'espérance et la variance de $\hat{\theta}_n$.
2. Quelle est la loi de $K+1-X_i$ ?
3. Calculer l'espérance et la variance de $\hat{\tau}_n$ (pour cette dernière on pourra s'interroger sur le signe de $2\phi(x)\phi(K+1-x) - \phi(x)^2 - \phi(K+1-x)^2$)
4. Entre $\hat{\theta}_n$ et $\hat{\tau}_n$, lequel a la plus petite variance ?

## Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 3$, on note $f_n$ la fonction qui à tout réel $x$ associe $x^n + x^{n-1}$.

1. Soit $n \geq 3$.
   (a) En considérant la fonction $f_n$, établir que l'équation $x^n + x^{n-1} = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$. On la note $x_n$.
   (b) Montrer que $x_n > 1$.
2. (a) Justifier l'existence d'un entier $n_0 \geq 3$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{n}{2}$.
   (b) À l'aide de ce résultat, montrer que pour tout entier $n \geq n_0$, on a $f_{n+1}(x_n) \geq n+1$. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante et montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.
3. Montrer que $\frac{n}{\ln(n)}(x_n - 1) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. On pourra par exemple commencer par vérifier que $2x_n^{n-1} \leq n \leq 2x_n^n$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 20

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soit $n \geq 2$ un entier. Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$.

1. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. On tire $k$ boules d'un coup dans l'urne, et l'on note $I_1 < \cdots < I_k$ les numéros obtenus classés par ordre croissant. Déterminer, pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$ et tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la probabilité que $I_j$ soit égal à $i$.
2. En déduire l'identité :
$$\sum_{i=1}^{n} \binom{i-1}{j-1}\binom{n-i}{k-j} = \binom{n}{k}.$$
3. On reprend notre urne avec sa composition initiale ($n$ boules numérotées). On enlève au hasard une boule de l'urne, et l'on note $I$ le numéro de cette boule. Puis, pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on tire $k-1$ boules d'un coup, et l'on note $Y$ le nombre de boules, parmi ces $k-1$ boules, qui ont un numéro strictement plus petit que $I$.
   (a) Quelle est la loi de $Y$ ?
   (b) Déterminer, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la probabilité que $I = i$ sachant que $Y = k-1$. Pour quelles valeurs de $i$ cette probabilité est-elle maximale ?

## Exercice 2

Soit $g : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$\forall y \in [0, +\infty[\,,\ g(y) = \int_0^y \exp(t^4)\mathrm{d}t\,.$$

1. Montrer que $g$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans un ensemble à préciser.
2. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, il existe un unique réel, noté $f(x)$, tel que
$$\int_x^{f(x)} \exp(t^4)\mathrm{d}t = 1\,.$$
3. Etudier la continuité et la dérivabilité de $f$ sur $[0, +\infty[$, et montrer que $f$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
4. Montrer que $f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, puis que $e^{x^4}(f(x) - x) \underset{x\to+\infty}{\to} 1$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 21

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes, toute de loi exponentielle de paramètre 1, c'est-à-dire, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X_1 \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

On note $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de $M_n$, notée $F_n$, ainsi que sa densité, notée $f_n$.
2. Vérifier que $t(1 - F_n(t))$ tend vers 0 quand $t$ tend vers $+\infty$.
3. En déduire, après une integration par parties, que
$$\mathbb{E}[M_n] = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(t))\mathrm{d}t\,.$$
4. Établir finalement que $\mathbb{E}[M_n] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
5. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\left(M_n - \ln(n) \leq t\right)$ converge quand $n \to +\infty$, vers une limite que l'on déterminera.

## Exercice 2

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a
$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right).$$
2. On pose, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,
$$I(x) = \int_0^{\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\right)\mathrm{d}\theta\,.$$
   (a) Vérifier que $I(x)$ est bien définie.
   (b) On suppose que $|x| < 1$. On admet que pour toute fonction $f$ continue sur $[a, b]$
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$
   En utilisant la première question et la propriété ci-dessus, montrer que $I(x) = 0$.
   (c) On suppose maintenant $|x| > 1$. Montrer qu'alors $I(x) = 2\pi\ln(|x|)$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

## Planche 22

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

### Exercice 1

Soit $X$ une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda \geq 0$ (pour $\lambda = 0$, il s'agit d'une variable aléatoire qui vaut 0 avec probabilité 1).

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)\dots(X-k)]$.
2. En déduire une expression de la variance de $X$.
3. Calculer $\mathbb{E}[\frac{1}{X+1}]$ et $\mathbb{E}[\frac{1}{(X+1)(X+2)}]$
4. En déduire $\mathbb{E}[\frac{1}{X+2}]$
5. Pour $n \geq 1$ entier et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$, on définit la fonction $f_x : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ qui à $\lambda \geq 0$ associe la probabilité de l'événement $\bigcap_{i=1}^n \{X_i = x_i\}$, pour $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\lambda$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}^n$, la fonction $f_x$ atteint son maximum sur $\mathbb{R}^+$ en un unique point, noté $g(x)$, que l'on déterminera.
   (b) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\lambda$. Donner l'espérance et la variance de $g(X_1, \dots, X_n)$.

### Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $f_n$ la fonction qui à tout réel $x$ associe $x^n + x - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une unique solution $x_n \in ]0,1[$ à l'équation $f_n(x) = 0$.
2. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers un nombre $\ell \in ]0,1]$.
4. Montrer que $\ell = 1$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 23

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ possédant un moment d'ordre 2 fini. On souhaite montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}[X] \leq -t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2\mathbb{E}[X^2]}\right).$$

1. Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Montrer que pour réel $\lambda > 0$, on a
$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}[X] \leq -t) = \mathbb{P}\left(e^{-\lambda(X-\mathbb{E}[X])} \geq e^{\lambda t}\right) \leq e^{-\lambda t}\mathbb{E}\left[e^{-\lambda(X-\mathbb{E}[X])}\right].$$
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 + x \leq e^x$. En déduire que pour tout $\lambda > 0$, on a
$$\mathbb{E}[e^{-\lambda X}] \leq 1 - \lambda\mathbb{E}[X] + \frac{\lambda^2\mathbb{E}[X^2]}{2} \leq e^{-\lambda\mathbb{E}[X] + \frac{\lambda^2\mathbb{E}[X^2]}{2}}.$$
3. Conclure en choisissant $\lambda > 0$ judicieusement.

## Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x$, on pose $f_n(x) = x\cos^n x$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $f_n$ atteint son maximum sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ en un unique point $x_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$, qui correspond à l'unique solution sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ de l'équation $x\tan(x) = \frac{1}{n}$.
2. Quel est le sens de variation de la suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ? Quelle est sa limite ?
3. Montrer que $nx_n^2 \to 1$ lorsque $n \to +\infty$.
4. Trouver la limite de $\sqrt{n}f_n(x_n)$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 24

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Une urne contient initialement une boule rouge et une boule bleue. On effectue des tirages indépendants dans l'urne. Si la boule tirée est bleue on s'arrête, si elle est rouge on la remet et on rajoute une boule rouge supplémentaire dans l'urne. On note $X$ le nombre de tirages qu'il faut pour obtenir une boule bleue, et l'on pose $X = 0$ si l'on n'obtient jamais de boule bleue.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = 1), \mathbb{P}(X = 2), \mathbb{P}(X = 3)$.
2. Combien y a t-il de boules lors du $n$-ième tirage (s'il a lieu) ?
3. On note $A_i$ l'événement « on tire une boule bleue lors du $i$-ème tirage ». Exprimer l'événement $X > n$ en fonction des $A_i$. En déduire que $\mathbb{P}(X = 0) = 0$.
4. Calculer $\mathbb{P}(X = n)$ pour $n \geq 1$.
5. Quelle est l'espérance de $X$ ?

## Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n$ définie par

$$f_n(x) = e^{-nx} - x$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution positive $x_n$ à l'équation $f_n(x) = 0$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est monotone. En déduire sa convergence vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
3. Calculer la valeur de la limite $\ell$ de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.
4. Montrer que la suite $(nx_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 25

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

On suppose que le nombre de personnes qui se présentent aux caisses d'un grand magasin en une heure est une variable aléatoire $X$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le magasin comporte $N > 3$ caisses, et on suppose que chaque personne choisit au hasard sa caisse parmi les $N$. Pour $1 \leq i \leq N$, on note $X_i$ le nombre de personnes ayant choisi la caisse numéro $i$.

1. Déterminer la loi de $X_i$ conditionnellement à l'événement $X = n$, puis la loi de $X_i$.
2. Déterminer, sans nouveaux calculs la loi de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de $X_1$ et $X_2$.
4. Les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ sont-elles indépendantes ?

## Exercice 2

Soit

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x} \mathrm{d}x \,.$$

1. Montrer que $I$ est bien définie.

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $\delta_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1-x} \ln(x) \mathrm{d}x$.

2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$I = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 x^k \ln(x) \mathrm{d}x + \delta_n \,.$$

3. Montrer que la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
4. Calculer, pour tout entier $k \geq 0$, la valeur de $\int_0^1 x^k \ln(x) \mathrm{d}x$.
5. En déduire la valeur de $I$.

*On admettra que* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 26

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soit $n \geq 3$ un entier et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, possédant un moment d'ordre 2 fini. On note

$$\operatorname{Var}(X_1) = \sigma^2 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[|X_1 - X_2|] = \mu\,,$$

et l'on suppose que $\sigma^2 > 0$.

1. Montrer que $\operatorname{Var}(|X_1 - X_2|) = 2\sigma^2 - \mu^2$.

On considère la variable aléatoire $S_n$ définie par

$$S_n = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |X_i - X_j|\,,$$

où la somme porte sur les paires d'indices $(i, j)$ telles que $1 \leq i < j \leq n$.

2. Que vaut l'espérance de $S_n$ ?
3. Montrer que $\operatorname{Var}(S_n) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$, puis que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}\left(|S_n - \mu| \geq \varepsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

## Exercice 2

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ donnée par $u_1 = 1$ et

$$\forall n \geqslant 2\,,\ u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}\,.$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{2n}$, et en déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$, et en déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (u_n - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 27

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soit $p$ un réel tel que $0 < p < 1$. On effectue des lancers indépendants d'une pièce ayant probabilité $p$ de tomber sur « pile », et l'on s'intéresse à la variable aléatoire $X$ correspondant au temps d'arrivée du premier « pile ».

1. Quelle est la loi de $X$ ?
2. Soit $m \geq 1$ un entier. Quelle est la probabilité que $X$ soit multiple de $m$ ?
3. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ les événements « $X$ multiple de $m$ » et « $X > n$ » sont-ils indépendants ?

## Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction dérivable de dérivée continue telle que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même. On note $g$ la fonction réciproque de $f$.

1. Montrer que $f$ est strictement croissante et $f(0) = 0$.
2. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,
$$xf(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} g(t)dt.$$
3. En déduire que pour tout $x, y \geqslant 0$ :
$$xy \leqslant \int_0^x f(t)dt + \int_0^y g(t)dt.$$
4. Soient $p$ et $q$ deux réels plus grand que 1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, montrer que pour tout $x, y \geqslant 0$ :
$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$
(on cherchera une fonction simple $f$ telle que $\int_0^x f(t)dt = x^p/p$).
5. En déduire que si $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ sont des réels ; on a :
$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n (a_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (b_i)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$
(on pourra commencer par étudier le cas où $(\sum_{i=1}^n (a_i)^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=1}^n (b_i)^q)^{\frac{1}{q}} = 1)$ Que reconnaissez vous pour $p = q = 2$ ?

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 28

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

On dit que $X$ une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{Z}$ a une loi symétrique si pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z = -k)$$

1. Soient $X, Y$ deux variables aléatoires indépendante de loi géométrique de paramètre $p$. On pose $Z = X - Y$. Quel est la loi de $Z$ ? Est ce une loi symétrique ?
2. Si $Z$ a une loi symétrique et que son espérance est bien définie, que vaut son espérance ?
3. Montrer plus généralement que si $X$ et $Y$ ont même loi à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et sont indépendants alors $X - Y$ a une loi symétrique.
4. Soit $Z$ tel que $\mathbb{P}(Z = -1) = \mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2}$. Est ce qu'il existe $X, Y$ de même loi sur $\mathbb{Z}$ indépendants tels que $X - Y$ a même loi que $Z$ ?

## Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 0$ on pose

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos^2 x}{x+1} dx \quad \text{et} \quad v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x+1} dx$$

1. Calculer $a_n = u_n + v_n$. En déduire que la série $\sum_n a_n$ est divergente.
2. En utilisant la relation $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$ et une intégration par partie, montrer que pour tout $n > 0$, on a
$$|u_n - v_n| \leq \frac{1}{2\pi n^2}.$$
3. En déduire que $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont deux séries divergentes.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose
$$f_\alpha(x) = \frac{\sin^2 x}{(x+1)^\alpha} \quad \text{for } x \geq 0.$$
Pour quelles valeurs de $\alpha$ la fonction $f_\alpha$ admet une intégrale sur $[0, \infty]$ ?

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

## Planche 29

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

### Exercice 1

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres $p$ et $q > 0$. On définit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}.$$

Quelle est la probabilité que la matrice $A$ soit diagonalisable ? Que dire si $X$ et $Y$ suivent des lois de Bernoulli ?

### Exercice 2

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée de réels positifs. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n + a_n + 1}.$$

1. Vérifier que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie.
2. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge, alors la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge.

On cherche maintenant à montrer la propriété réciproque. On suppose désormais que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite $\ell \geq 0$. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_0 = 1$ et

$$v_{n+1} = \frac{1}{v_n + \ell + 1}.$$

3. Vérifier que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est bien définie.
4. Montrer que l'equation
$$x = \frac{1}{x + \ell + 1}$$
pour $x \geq 0$ possède une unique solution $L > 0$.
5. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers $L$.
6. Étudier $u_n - v_n - A(a_n - \ell)$ for $A$ assez grand. En déduire que la suite $(u_n - v_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 30

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$. Soit $N$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des $X_i$. On note

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i = \sum_{i=1}^{+\infty} X_i 1_{i\leq N}.$$

(Si $N = 0$, alors $S = 0$.)

1. Dans cette question uniquement on suppose que $N$ est une variable aléatoire de loi de poisson de paramètre $\lambda$ indépendante des $X_i$. Touver la loi du couple $(S, N - S)$. Les variables $S$ et $N - S$ sont-elles indépendantes ?
2. Soit $n \geq 1$ un entier. On suppose maintenant que $N$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.
   (a) Déterminer la loi du couple $(S, N - S)$. Quelle est la loi de $S$ ? Et celle de $N - S$ ?
   (b) Les variables $S$ et $N - S$ sont-elles indépendantes ? On pourra par exemple considérer les événement $\{S = 0\}$ et $\{N - S = 0\}$.

## Exercice 2

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in [0, 1]\,,\ f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\,.$$

1. Montrer que $f$ réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, \ln(1 + \sqrt{2})]$. On note $g$ la réciproque de $f$.
2. Montrer que
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \ln(1 + \sqrt{2}) - \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} g(u)\mathrm{d}u\,.$$
3. En déduire la valeur de $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 31

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

On lance une pièce avec la probabilité $p$ de faire « Pile ». On note $A_n$ l'événement

« on obtient pour la première fois deux piles consécutifs lors du $n$-ième lancer »

et l'on désire calculer sa probabilité $p_n$.

1. Déterminer $p_1, p_2$ et $p_3$.
2. Exprimer $p_{n+2}$ en fonction de $p_n$ et $p_{n+1}$ pour $n \geq 1$.
3. Justifier qu'il est quasi-certain d'obtenir deux piles consécutifs.
4. Déterminer le nombre d'essais moyen pour obtenir deux piles consécutifs.

## Exercice 2

Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction dérivable de dérivée continue telle que

$$\forall x \in [a, b], |f'(x)| < 1.$$

1. Montrer qu'il existe au moins une solution $p \in [a, b]$ à l'équation $f(p) = p$.
2. Montrer que la solution est unique.

Pour tout $x_0 \in [a, b]$, on considère la suite définie par $u_0 = x_0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n \geq 0$.

3. Donner une majoration de $|f(x) - f(y)|$ en fonction de $|x - y|$ pour $x, y \in [a, b]$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 32

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi.

1. On suppose dans cette question que $X$ et $Y$ sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que
$$\mathbb{P}(|X-Y| \leq 2) \leq 5\mathbb{P}(X=Y).$$
2. Soit $C$ la plus petite constante telle que pour tout couple variable aléatoires $(X,Y)$ indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ on a :
$$\mathbb{P}(|X-Y| \leq 2) \leq C\mathbb{P}(X=Y).$$
Montrer que $3 \leq C \leq 5$. (on pourra considérer la loi uniforme sur $\{2; 4; 6; \ldots; 2N\}$)
3. Dans cette question on ne suppose plus que $X$ et $Y$ sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Ce sont deux variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. Montrer que
$$\mathbb{P}(|X-Y| \leq 2) \leq 5\mathbb{P}(|X-Y| \leq 1).$$
(on pourra se ramener à des variables aléatoires discrètes en considérant $\lfloor X \rfloor$ et $\lfloor Y \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x$ c'est à dire l'unique entier $n$ tel que $n \leq x < n+1$).

## Exercice 2

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que

(i) il existe $M$ un réel positif tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $|\sum_{n=0}^{N} a_n| \leq M$,

(ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.$$
2. En déduire que $\sum_0^N a_n b_n$ converge lorsque $N$ tend vers l'infini.
3. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 33

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

On lance cinq dés. Après ce premier lancer ceux des dés qui ont donné un "1" sont mis de côtés et les autres sont relancés. On procède ainsi jusqu'à l'obtention des cinq "1" . On note $T$ la variable aléatoire déterminant le nombre de lancers nécessaires.

1. Calculer $\mathbb{P}(T \leq n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
2. En déduire que $T$ admet une espérance et déterminer celle-ci.

## Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $f_n$ la fonction qui à tout réel $x$ associe $e^{-x} - x^{2n-1}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une unique solution $x_n \in ]0, 1[$ à l'équation $f_n(x) = 0$.
2. Calculer $f_{n+1}(x_n)$ et en déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\ln(x_n) = -\frac{x_n}{2n-1}$.
4. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers 1.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 34

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soit $X$ une variable aléatoire réelle, d'espérance $\mu$ et de variance $\sigma^2$.

1. Montrer que pour tous réels $t > 0$ et $a \geq 0$, on a
$$\mathbb{P}(X - \mu \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[(X-\mu+a)^2]}{(t+a)^2} = \frac{\sigma^2 + a^2}{(t+a)^2}.$$
2. En déduire que pour tout réel $t > 0$, on a
$$\mathbb{P}(X - \mu \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}.$$
3. On appelle *médiane* de $X$ tout réel $m$ vérifiant
$$\mathbb{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2}.$$
En utilisant le résultat de la question 2., montrer que
$$\mathbb{P}(X \geq \mu + \sigma) \leq \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X \leq \mu - \sigma) \leq \frac{1}{2}.$$
En déduire que si $m$ est une médiane de $X$, alors $|m - \mu| \leq \sigma$.

## Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit
$$E_n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in [0;1]^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$
pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans $E_n$ on note
$$h(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i$$
avec la convention $0 \ln 0 = 0$

1. Montrer que si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est dans $E_n$, $h(x) \geqslant 0$.
2. Quels sont les $x$ de $E_n$ pour lesquels $h(x) = 0$ ?
3. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $nx_i \ln(nx_i) \geq nx_i - 1$. Quand y a t-il égalité ?
4. En déduire que si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est dans $E_n$, alors $h(x) \leq \ln n$.
5. Quels sont les $x$ de $E_n$ pour lesquels $h(x) = \ln n$ ?

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 35

Vous présenterez ces <u>deux</u> exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soit $U$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0;1]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $[x]$ sa partie entière définie par $[x] \in \mathbb{Z}$ **et** $[x] \leq x < [x]+1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de $X = 1 + [nU]$ ?
2. Soit $p \in ]0;1[$. Quelle est la loi de $Y = \left[\dfrac{\ln(U)}{\ln(1-p)}\right]$ ?

## Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que $\frac{h_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

Pour tout entier $n \geq 1$, et tout réel $x \in [0,1]$, on définit

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x)(1+\frac{x}{2})\dots(1+\frac{x}{n})}.$$

On introduit également l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x\,.$$

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a $f_n(x) \leq \frac{1}{1+xh_n}$, et en déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
3. Calculer et encadrer la dérivée de $-\ln(f_n)$ sur $[0,1]$, et en déduire que pour tout $x \in [0,1]$,
$$e^{-xh_n} \leq f_n(x) \leq e^{-x(h_n-1)}\,.$$
4. Établir que $\ln(n)I_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 36

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

On considère une suite de jets indépendants de pièces équilibrées. On note $X_n = 1$ si le $n$ ième jet donne Face et $X_n = 0$ sinon.

1. On note $T_F$ le temps d'apparition de Face pour la première fois. $T_F = \inf\{n \geqslant 1 : X_n = 1\}$. Quelle est la loi de $T_F$ ? quelle est son espérance ?
2. On note $T_{FP}$ le temps d'apparition de la première fois où Pile apparaît juste après Face. $T_{FP} = \inf\{n \geqslant 1 : X_{n-1} = 1, X_n = 0\}$. Quelle est la loi de $T_{FP}$ ? quelle est son espérance ? (On pourra s'intéresser à la variable $T_{FP} - T_F$).
3. On note $T_{FF}$ le temps d'apparition de la première fois où Face apparaît deux fois d'affilés. En considérant le résultat de la première pièce après $T_F$ le premier Face donner une intuition de la formule
$$\mathbb{E}[T_{FF} - T_F] = 1 + \frac{1}{2}(1 + \mathbb{E}[T_{FF}])$$
Qui a la plus grande espérance $T_{FF}$ ou $T_{FP}$ ?
4. Calculer $\mathbb{P}(T_{FP} < T_{FF})$ la proba qu'on voit apparaitre Face/Pile d'affilé avant Face/Face d'affilé.

## Exercice 2

Soi $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $0 < u_0 < \pi$ et pour tout $n > 0$ :
$$u_n = \sin u_{n-1}.$$

1. Étudiez la convergence de $u$.
2. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers 1 lorsque $n$ tend vers l'infini. Calculer la limite de $\frac{u_{n+1}+u_n}{u_n}$.
3. Montrer que $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^3}$ tend vers $\frac{1}{6}$.
4. En déduire que $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ tend vers $\frac{1}{3}$
5. En déduire la limite de $\sqrt{n}u_n$. Pour cette dernière question, on admettra le résultat suivant : si une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors
$$\frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} \ell.$$

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

## Planche 37

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

### Exercice 1

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose $W_n = \sum_{i=1}^{n} iX_i$, et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $p_{n,k} = \mathbb{P}(W_n = k)$.

1. Quelle est la plus grande valeur de $W_n$ ? On notera cette valeur $s_n$.
2. Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, s_n\}$, on a $p_{n,k} > 0$.
3. Calculer l'espérance et la variance de $W_n$.
4. Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, s_n\}$, on a $p_{n,k} = p_{n,s_n-k}$.

*On donne* $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

### Exercice 2

Pour tout $n$ entier supérieur où égal à 2, on considère la fonction :

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $f_n$ a une unique racine réelle positive que l'on nommera $\lambda_n$.
2. Montrer $0 < \lambda_n < \frac{3}{4}$.
3. Montrer que la suite $(\lambda_n)$ est croissante puis qu'elle converge vers une limite que l'on notera $\ell$.
4. Montrer que $\ell$ est racine du polynôme $X^2 + X - 1$. En déduire sa valeur.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 38

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

La durée de vie d'un certain modèle d'ampoule électrique, exprimée en heures, peut être modélisée par une variable aléatoire $X$ de loi exponentielle $E(\lambda)$ avec $\lambda = 1/1000$. On contrôle l'état d'une ampoule neuve après 300h d'utilisation.

1. Déterminer la probabilité que l'ampoule soit hors d'usage.
2. Si elle fonctionne, calculer la probabilité que sa durée de vie soit inférieure à 400h.
3. On équipe un local d'un nombre $n \geq 2$ d'ampoules électriques neuves. On suppose que les durées de vie $X_1, \ldots, X_n$ de ces ampoules sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi $E(\lambda)$. On contrôle l'état des ampoules après 300h d'utilisation. Avec quelle probabilité deux ampoules exactement sont-elles hors d'usage ?

## Exercice 2

On pose, pour $n$ dans $\mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} x^{2n} \sqrt{4 - x^2}\, dx.$$

1. Calculer $u_0$ à l'aide du changement de variable $x = 2\cos\theta$.
2. À l'aide d'une intégration par partie, trouvez une relation entre $u_{n+1}$ et $u_n$.
3. On appelle, pour $n$ dans $\mathbb{N}$, $n$ ième nombre de Catalan le nombre

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

   Calculer $C_0$ et $\frac{C_{n+1}}{C_n}$.
4. Montrer que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $u_n = C_n$.

ENSAE B/L Maths II

Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

## Planche 39

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 40

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée de réels positifs. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n + a_n + 1}.$$

1. Vérifier que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie.
2. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge, alors la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge.

On cherche maintenant à montrer la propriété réciproque. On suppose désormais que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite $\ell \geq 0$. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_0 = 1$ et

$$v_{n+1} = \frac{1}{v_n + \ell + 1}.$$

3. Vérifier que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est bien définie.
4. Montrer que l'equation
$$x = \frac{1}{x + \ell + 1}$$
pour $x \geq 0$ possède une unique solution $L > 0$.
5. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers $L$.
6. Étudier $u_n - v_n - A(a_n - \ell)$ for $A$ assez grand. En déduire que la suite $(u_n - v_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 41

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

On considere les intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) \mathrm{d}x.$$

1. Vérifier que $I$ et $J$ sont bien définies. Montrer que $I = J$.
2. Calculer $I + J$.
3. En trouvant une relation entre $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x) \mathrm{d}x$ et $J$, en déduire la valeur de $I$ et $J$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 42

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\tan(x) = x$ a une unique solution dans $]n\pi - \frac{\pi}{2}; n\pi + \frac{\pi}{2}[$. On note dans toute la suite $x_n$ cette solution.
2. Trouver une relation simple entre $x_n$ et $\text{Arctan}(x_n)$.
3. Quelle est la limite $c$ lorsque $n$ tend vers l'infini de $\frac{x_n}{n}$ ?
4. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = \pi/2.$$
5. En déduire la limite $\ell$ lorsque $n$ tend vers l'infini de $x_n - cn$.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 43

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et définie par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (-1)^n \sin\left(\frac{u_n}{2}\right).$$

1. Montrer que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{y}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2}|x-y|.$$
2. On pose $v_n = u_{2n} - u_{2n-2}$ pour $n \geq 1$. Montrer que $|v_{n+1}| \leq |v_n|/4$. En déduire que la *série* de terme général $v_n$ est absolument convergente puis que la suite extraite $(u_{2n})_{n\geq 0}$ est convergente.
3. Montrer de même que la suite extraite $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ est convergente.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et calculer sa limite.

ENSAE B/L Maths II
Préparation : 30 min, Présentation : 30 min

# Planche 44

Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

## Exercice 1

Soit $n$ un entier et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements indépendants tels que, pour tout $k \leq n$,

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{2k}.$$

On note $E_n$ l'événement "Au moins un $A_i$ est réalisé".

1. Calculer $\mathbb{P}(E_n)$.
2. Montrer l'inégalité $1 - x \leq \exp(-x)$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que

$$\mathbb{P}(E_n) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\right).$$

3. Quelle est la limite de $\mathbb{P}(E_n)$ ?

## Exercice 2

Soient $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ des réels fixés.

1. Montrer que pour tout réel $b > a_p$ il existe un unique réel $x_b > 0$ tel que

$$a_1^{x_b} + \cdots + a_p^{x_b} = b^{x_b}$$

(indication : commencer par regarder le cas $b = 1$).

2. Pour $b < b'$, comparer $x_b$ et $x_{b'}$.
3. Chercher $\lim_{b \to +\infty} x_b$ puis en déduire $\lim_{b \to +\infty} x_b \ln b$.