E.N.S.A.E 2019

Mathématiques
Planche N°37

Ce sujet est composé de deux exercices.
Le candidats doit les traiter ***tous les deux*** *puis les exposer dans l'ordre de son choix.*

Exercice 1

On considère un réel a et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner la dimension et une base de $\mathrm{Ker} f$ et de $\mathrm{Im} f$.
2. Montrer que si un vecteur u est vecteur propre de f associé à une valeur propre non nulle, alors u est dans $\mathrm{Im} f$.
3. Donner les valeurs propres de f.

Exercice 2

Supposons que des tablettes de chocolats contiennent chacune une image parmi n possibles. Un collectionneur souhaite posséder au moins un exemplaire de chacune des images et voudrait savoir combien il faut acheter en moyenne de tablettes pour cela. Soit X le nombre de tablettes qui ont du être achetées pour posséder les n images. On appelle X_i le nombre de tablettes achetées avant d'avoir une nouvelle image lorsqu'on possède déjà $i-1$ images (avec $i \geqslant 2$).

(a) Soit $i \geqslant 2$ un entier. Pour tout , déterminer la loi de X_i. En déduire $\mathbb{E}(X_i)$ et $\mathrm{Var}(X_i)$.

(b) i. Exprimer X en fonction des variables aléatoires X_i.

ii. Écrire un programme en *Scilab* permettant d'obtenir une valeur approchée de $\mathbb{E}(X)$ dans le cas où $n = 30$.

iii. Montrer que $\mathbb{E}(X) \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)$

(c) i. Montrer que $\mathrm{Var}(X) \leqslant n^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

ii. On note $H_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

Montrer que la variable aléatoire $\dfrac{X}{nH_n}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 1.

E.N.S.A.E 2019

Mathématiques
Planche N°8

Ce sujet est composé de deux exercices.
Le candidats doit les traiter ***tous les deux*** *puis les exposer dans l'ordre de son choix.*

Exercice 1

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à termes positifs.

On pose, pour tout entier naturel n non nul : $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ku_k$ On se propose de montrer que les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature et que, en cas de convergence,

on a la relation : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$

(a) Montrer que, pour tout entier naturel N non nul, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{k=1}^{N} u_k - Nv_N$

(*On pourra remarquer que* $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$)

(b) On suppose que la série de terme général u_n est convergente.
Montrer que la série de terme général v_n est convergente.

(c) On suppose que la série de terme général v_n est convergente.

i. Montrer que la suite (nv_n) admet une limite, finie ou infinie.

ii. Montrer que cette limite est nulle.

iii. En déduire que la série de terme général u_n converge.

(d) Conclure

Exercice 2

Soit X une variable à densité dont la densité est strictement positive et continue sur $\mathbb{R}$, dont la fonction de répartition est notée F.
On note $s > 0$ un réel fixé et Y la variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p et définie par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{[X\leqslant s]}\big(Y=1\big) = 1 \\ \\ \mathbb{P}_{[X>s]}\big(Y=1\big) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1. Dans cette question uniquement, X suit une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
Écrire un programme en *Scilab* permettant d'obtenir une réalisation de Y pour une valeur de s entrée par l'utilisateur.
2. Calculer p en fonction de $F(s)$.
3. On considère les deux fonctions G_0 et G_1 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$G_1(x) = \mathbb{P}_{[Y=1]}\big(X \leqslant x\big) \text{ et } G_0(x) = \mathbb{P}_{[Y=0]}\big(X \leqslant x\big)$$

(a) Calculer $G_0(s)$.

(b) Exprimer $\mathbb{P}_{[X\leqslant x]}\big(Y=1\big)$ en fonction de $F(x)$, $F(s)$ et de $G_1(x)$.