E.N.S.A.E 2021

Mathématiques
Planche N°5

Ce sujet est composé de deux exercices.
Le candidat doit les traiter ***tous les deux*** *puis les exposer dans l'ordre de son choix.*

Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t}$$

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale dans les questions 1)2)3)

1. Montrer que l'intégrale $f(x)$ est convergente.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$.
   Montrer que $0 < f(x) - f(y) \leqslant \dfrac{y - x}{2}$.
3. (a) En utilisant un argument de concavité, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ , \ \forall t \in \mathbb{R}_+ \ , \ 2\sqrt{xe^t} \leqslant x + e^t$$

   (b) Montrer que f réalise une bijection continue et strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 1]$.
4. Calculer cette intégrale en effectuant le changement de variable $u = x + e^t$.

Exercice 2

On note p un réel de $]0, 1[$ et $q = 1 - p$.
On dit qu'une variable X suit la loi de Rademacher de paramètre p si $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ et si :

$$\begin{cases} \mathbb{P}([X = 1]) = p \\ \\ \mathbb{P}([X = -1]) = q \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{R}(p)$.
Dans tout l'exercice, on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Rademacher de paramètre p.

1. Calculer $\mathbb{E}(X_k)$ et $\mathrm{Var}(X_k)$.
2. Pour tout entier naturel n, on définit la variable aléatoire T_n :

$$T_n = \prod_{k=0}^{n} X_k$$

   (a) Calculer $\mathbb{E}(T_n)$.
   (b) En déduire la loi de T_n.
3. Soit K une variable aléatoire indépendante des X_k et suivant la loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$).
   On pose, pour tout ω de Ω :

$$T(\omega) = \prod_{k=0}^{K(\omega)} X_k(\omega)$$

   On admet que T est une variable aléatoire.
   (a) Calculer $\mathbb{E}(T)$.
   (b) Donner la loi de T.

Mathématiques
Planche N°55

Ce sujet est composé de deux exercices.
Le candidat doit les traiter ***tous les deux*** *puis les exposer dans l'ordre de son choix.*

Exercice 1

Soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ u_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} v_i.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer une matrice $P \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle qu'on ait l'égalité matricielle :

$$(u_0 \cdots u_n) = (v_0 \cdots v_n)P.$$

   On donnera explicitement, pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, l'expression du terme $p_{i,j}$ situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice P.

2. Écrire un programme Scilab qui demande un entier n, puis construit et affiche la matrice P. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n et $\mathcal{B}$ sa base canonique.
3. On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(Q)(X) = Q(X+1)$.
   (a) Montrer que φ est bijectif et déterminer son inverse.
   (b) En déduire que P est inversible et calculer son inverse.
   (c) En déduire l'expression de v_n en fonction des u_i pour $i \in [\![0, n]\!]$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de permutations sans point fixe de $[\![1, n]\!]$ (i.e. de permutations σ de $[\![1, n]\!]$ telles que : $\forall i \in [\![1, n]\!]\ ,\ \sigma(i) \neq i$) et on pose $d_0 = 1$.
   (a) Montrer que $\forall n \in\ \mathbb{N}\ ,\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d_i = n!$
   (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de d_n en fonction de n.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On pose : $\begin{cases} Y_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ Y_n = X(X-1)\cdots(X-n+1) \end{cases}$.

1. Écrire une fonction en Scilab, d'arguments n et *lambda*, qui renvoie une réalisation de Y_n.
2. Montrer que Y_n admet une espérance et vérifier que $\mathbb{E}(Y_n) = \lambda^n$.
3. Calculer $\text{cov}(X, Y_n)$.
4. En déduire que $\text{Var}(Y_n) \geqslant n^2\lambda^{2n-1}$.