Mathématiques
Planche N°55

Ce sujet est composé de deux exercices.
Le candidat doit les traiter ***tous les deux*** *puis les exposer dans l'ordre de son choix.*

Exercice 1

Soit a et b deux réels non nuls tels que $|a| \neq |b|$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ a & b & a & b \\ b & a & b & a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un vecteur V non nul tel que $M(a,b)V = (2a+2b)V$
2. Donner les valeurs propres de $M(a,b)$.
3. On suppose que $0 < b < a$
   Montrer qu'il existe une matrice $A(a,b) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $M(a,b) = A(a,b)^4$.
4. On suppose que $0 < a < b$.
   (a) Montrer qu'il existe une matrice $B(a,b) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ telle que $M(a,b) = B(a,b)^4$.
   (b) Existe-t-il une matrice $C(a,b) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ symétrique telle que $M(a,b) = C(a,b)^4$?
   (c) Existe-t-il une matrice $D(a,b) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $M(a,b) = D(a,b)^4$?

Exercice 2

On fixe un entier $n \geqslant 2$ et $(U_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur l'ensemble $[\![1,n]\!]$.
Ces variables modélisent les résultats successifs d'un tirage au hasard et avec remise d'une boule parmi n boules numérotées de 1 à n.
Pour tout $m \geqslant 1$ et tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note $X_i^{(m)} = \operatorname{Card}\{k \in [\![1,m]\!] : U_k = i\}$
le nombre d'occurrences de la boule i obtenues dans les m premiers tirages.

1. Quelle est la loi de $X_i^{(m)}$ pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $m \geqslant 1$ fixés ?
2. Soit $m \geqslant 1$ et $i, j \in [\![1,n]\!]$ fixés, $i \neq j$.
   (a) Quelle est la loi de la variable aléatoire $X_i^{(m)} + X_j^{(m)}$?
   (b) En déduire $\operatorname{cov}(X_i^{(m)}, X_j^{(m)})$.
   (c) Les variables aléatoires $X_i^{(m)}$ et $X_j^{(m)}$ sont-elles indépendantes ?
   (d) Pouvait-on s'attendre au signe de cette covariance ?
3. On suppose maintenant qu'on effectue au total un nombre aléatoire N de tirages successifs avec remise, où N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et est indépendante de $(U_k)_{k\geqslant 1}$.
   On pose : $\forall i \in [\![1,n]\!]\ ,\ Y_i = X_i^{(N)}$, avec par convention $X_i^{(0)} = 0$.

   (a) Écrire un programme en Scilab qui renvoie une réalisation de Y_1.
   (b) Écrire un programme en Scilab qui renvoie une valeur approchée de $\mathbb{E}(Y_1)$ (on admettra l'existence de cette espérance).

Mathématiques
Planche N°56

Ce sujet est composé de deux exercices.
Le candidat doit les traiter ***tous les deux*** *puis les exposer dans l'ordre de son choix.*

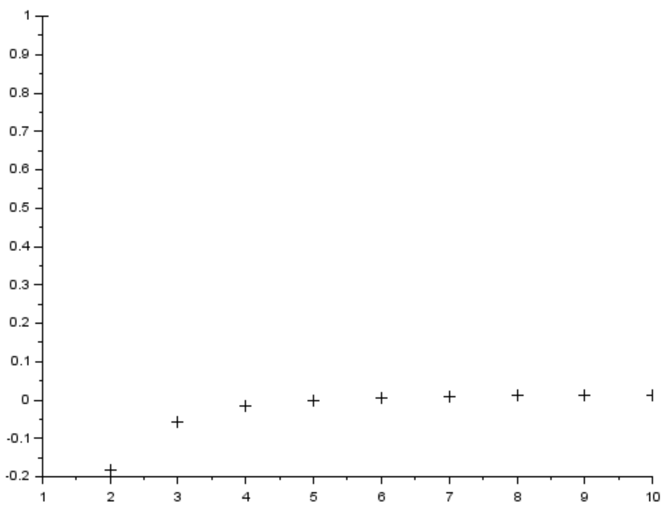
Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par les relations : $\begin{cases} \forall n \geqslant 2\ ,\ u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} \\ u_1 = 1 \end{cases}$

1. Écrire une fonction **suite** en Scilab d'argument un entier n qui renvoie une valeur approchée de u_n.
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n \leqslant \sqrt{2n}$.
3. En déduire un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.
4. On suppose la fonction **suite** correctement déclarée et on considère le programme suivant :

```
a=zeros(1,10)
a(1)=1
for k=2:10
    a(k)=suite(k)-sqrt(k)-0.5
end
plot2d(1:10,a,-1)
```

Il renvoie la sortie graphique suivante :



(a) Émettre une conjecture sur le comportement asymptotique de la suite (u_n).

(b) Démontrer cette conjecture

Exercice 2

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

On pose, pour tout $\omega \in \Omega$, $A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 0 \\ 1 & Y(\omega) \end{pmatrix}$.

1. Calculer la probabilité que $A(\omega)$ soit inversible.
2. Calculer la probabilité que $A(\omega)$ soit diagonalisable.