AVRIL 2003

ITS

VOIE A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, car $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

2. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0$

3. $x^2 + 2x + 2 = 0$ implique $x = -1 \pm i$

4. La dérivée de $\frac{\ln x}{1 + x^2}$ est égale à $\frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{2x \ln x}{(1+x^2)^2}$

5. La dérivée de $x \cos x$ est égale à $\cos x - x \sin x$

6. $\sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^k = 0$

7. $\int_0^1 x e^x dx = \left[x e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1$

8. $\int_0^1 \frac{x-2}{x+1} dx = \int_0^1 (1 - \frac{3}{x+1})\, dx = 1 - 3 \ln 2$

9. $\lim\limits_{n} (1 + \frac{2}{3^n}) = 1$, car $\lim\limits_{n} \frac{2}{3^n} = 0$

10. On obtient les valeurs $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$

Exercice n° 2

❶ $Aire = \int_0^1 f(x)\,dx - a = \left[\frac{(x-1)^3}{3} + ax\right]_0^1 - a = \frac{1}{3}$

❷ On pose $y = (x-1)^2 + a - \ln x$. La dérivée est du signe de $2x^2 - 2x - 1$. La fonction admet un minimum pour $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Elle est décroissante avant cette valeur, puis croissante.

Si $f(\frac{1+\sqrt{3}}{2}) > 0$, l'équation n'admet pas de solution.

Si $f(\frac{1+\sqrt{3}}{2}) = 0$ (c'est-à-dire $a = \ln(\frac{1+\sqrt{3}}{2}) - (\frac{4-2\sqrt{3}}{4})$, l'équation admet une seule solution.

Si $f(\frac{1+\sqrt{3}}{2}) < 0$, l'équation admet deux solutions.

❸ Le graphe de f et le graphe de la fonction logarithme népérien ont deux points d'intersection d'abscisse 1 et a (que l'on ne cherchera pas à calculer).
L'aire est égale à :

$$\int_1^a (\ln x - (x-1)^2)\,dx = \left[x\ln x - x - \frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^a = a\ln a - a - \frac{(a-1)^3}{3} + 1$$

Exercice n° 3

❶ La fonction f est strictement croissante sur R.

$$f'(x) = a + be^{bx} > 0$$

❷ Comme f est continue et strictement croissante de R dans R, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution que l'on notera a.

Par ailleurs $f(-n) = -na + e^{-n}$.

Si $a > \frac{1}{e}$, alors $a \in \left]-1,0\right[$. Et si $\frac{1}{(n-1)e^{n-1}} > a > \frac{1}{ne^{n}}$, alors $a \in \left]-n+1,-n\right[$ $(n > 0)$

❸ $\int_0^1 f(x)dx = \left[a\frac{x^2}{2} + \frac{1}{b}e^{bx}\right]_0^1 = \frac{a}{2} + \frac{e^b - 1}{b}$

❹ On suppose dans cette question que $a < 0$.

- $f'(x) = a + be^{bx}$. Cette fonction s'annule pour une certaine valeur $d = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{-a}{b}\right)$. La fonction f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, d\right[$ et strictement croissante sur $\left]d, +\infty\right[$

- Le minimum de f est atteint pour $x = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{-a}{b}\right)$ et la valeur du minimum est égale à : $\frac{a}{b}\ln\left(\frac{-a}{b}\right) - \frac{a}{b}$

- Il faut $\frac{a}{b}\ln\left(\frac{-a}{b}\right) - \frac{a}{b} < 0$, d'où $a < -be$

Exercice n° 4

❶ Exprimer $Max(u,v) = (u-v)_+ + v$

❷ $\dfrac{u(t)}{v(t)} = t^2 + 1$, donc $F(t) = Max\{2, t^2 + 1\}$

F est dérivable sur $R - \{\pm 1\}$. En effet $f'_d(1) = 2 \neq f'_g(1) = 0$

❸ Si $l = 0$, $G(t) = Max\{2,1\} = 2$ et G est dérivable.

Si $l \neq 0$, $e^{lt} = 2$ implique $t = \dfrac{\ln 2}{l}$. G est dérivable sur $R - \left\{\dfrac{\ln 2}{l}\right\}$

PROBLEME

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = x^2 \ln(1 + x^2)$$

❶ f est une fonction paire, il suffit donc de faire l'étude sur l'ensemble des nombres réels positifs. Son graphe est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La dérivée de f est $f'(x) = 2x\ln(1+x^2) + \dfrac{2x^3}{1+x^2}$, expression qui est toujours positive. f est donc strictement croissante sur R^+. Le graphe de f a la forme de celui de la parabole d'équation $y = x^2$, mais avec des branches paraboliques plus verticales.

❷ $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2(\ln(1+x^2) - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt{e-1}$. Il y a donc deux points d'intersection entre les graphes de f et g.

❸ Le calcul de l’intégrale se fait dans un premier temps par parties.

On pose $u' = x^2$ et $v = \ln(1+x^2)$. On obtient :

$$I = \left[\frac{x^3}{3}\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}dx = \frac{\ln 2}{3} - \frac{2}{3}J \text{ , où } J = \int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}dx \text{ .}$$

Par ailleurs, $J = \int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}dx = \int_0^1 (x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2})\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x + Arctg\,x\right]_0^1 = -\frac{2}{3} + \frac{p}{4}$

Par conséquent $I = \frac{\ln 2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{p}{6}$

L’aire comprise entre le graphe de f , le graphe de g et les droites verticales d’équation $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx = \frac{\ln 2}{3} + \frac{1}{9} - \frac{p}{6}$

❹ On a $\int_0^t (f(x) - g(x))\,dx \geq t^2 \int_0^t (\ln(1+x^2) - 1)\,dx$ et $\underset{t \to +\infty}{Lim}\ j(t) = +\infty$.

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A
AVRIL 2003

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Corrigé

Exercice 1

1) $|\cos x| \leq 1$, donc $-1 \leq a_2 \leq 1$. Par conséquent $0 < a_3 < 1$ d'où $0 < a_n < 1$ pour n = 3.

2) Comme la fonction cos x est strictement décroissante sur l'intervalle [0, 1], si $a_n < a_{n+1}$ alors $a_{n+2} < a_{n+1}$. La dérivée de cos x est supérieure à -1 sur l'intervalle [0, 1], donc si $a_n < a_{n+1}$ alors on a $\cos a_n - \cos a_{n+1} < a_{n+1} - a_n$. Ceci montre que $a_n < a_{n+2} < a_{n+1}$. De la même façon, on montre que si $a_n > a_{n+1}$, alors $a_n > a_{n+2} > a_{n+1}$.

3) On en déduit que, soit la suite (a_{2n}) est croissante et majorée et la suite (a_{2n+1}) est décroissante et minorée, soit vice versa. Donc les deux suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) sont convergentes.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires $|a_{n+1} - a_{n+2}| = |\cos a_n - \cos a_{n+1}| = \sin k\, |a_n - a_{n+1}|$ pour un certain k dans (0, 1). Mais $\sin k < \sin 1 < 0.9$. Donc les suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) convergent vers la même limite.

4) Notons h cette limite. Alors h = cos h. Mais comme cos x is strictement décroissante sur l'intervalle [0, 1], et comme la fonction identité $x \mapsto x$ est strictement croissante sur le même intervalle [0, 1], les deux fonctions ont un seul point d'intersection sur cet intervalle. Donc la limite h est l'unique point de (0, 1) qui vérifie h = cos h.

Exercice 2

1°) Module et argument de z
On peut écrire

$$z = [2\sin(\varphi/2)\cos\frac{\varphi}{2} + i(1-1+2\sin^2\frac{\varphi}{2}]/2$$
$$= \sin\frac{\varphi}{2}[\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})]$$

Discutons suivant les valeurs de φ, le signe de $\sin\frac{\varphi}{2}$

* si φ=0 alors z=0.

* si $\varphi \in]0, \pi[$ alors z a pour module $\sin\frac{\varphi}{2}$ et argument $\frac{\varphi}{2}$

* si $\varphi \in]-\pi, 0[$ alors z a pour module $-\sin\frac{\varphi}{2}$ et argument $\frac{\varphi}{2}+\pi$

2°) Module et argument de (z-i)

On vérifie de la même manière que:

$z-i = \cos\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

Comme $\cos\frac{\varphi}{2} > 0$ pour tout $\varphi \in]0,\pi[$, $z-i$ a pour module $\cos\frac{\varphi}{2}$ et argument $\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2}$

De même on vérifie que: $\frac{z}{z-i} = i\,tg\frac{\varphi}{2}$ qui a pour module $tg\frac{\varphi}{2}$ et argument $\frac{\pi}{2}$ car $tg\frac{\varphi}{2}>0$ pour tout $\varphi \in]0,\pi[$.

3°) Ensemble de points M lorsque φ décrit $\in]0,\pi[$.

Soit M(z) un point de l'ensemble.

Comme on a : $z-i = \frac{1}{2}\left[\sin\varphi - i(1+\cos\varphi)\right]$ les coordonnées (x, y) de M(z) vérifient :

$x = \frac{1}{2}\sin\varphi$ et $y = -\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)$

Donc $x^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ et par suite M appartient au cercle (C) de centre $I(0, -\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$

Comme $0 \leq \sin\varphi \leq 1$ et $-1< \cos\varphi<1$, on en déduit que M décrit le demi-cercle de (C) privé des points O(0, 0) et A(-1, 0).

*** L'ensemble de points N**

Les coordonnées x et y de N vérifient x=0 et $y= tg\frac{\varphi}{2}$ avec $\varphi \in]0,\pi[$.

On en déduit que N décrit la demi-droite définie par x=0 et y>0 c'est-à-dire le demi-axe des y positifs sans l'origine.

Problème

Partie A

1. $g'(x) = 1 - e^x < 0$ pour tout $x\in [0,+\infty[$, donc g est décroissante sur $[0,+\infty[$. De plus, en utilisant la factorisation pour $x \neq 0$

$$g(x) = x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{e^x}{x}\right)$$

on trouve que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ car $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$

2.a) La fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$, strictement décroissante. Elle définit donc une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]-\infty,1]$ qui contient 0, donc l'équation g(x) = 0 admet une solution et une seule a dans $[0,+\infty[$.

b) Comme $g(1{,}14) \cong 0{,}0132 > 0$ et $g(1{,}15) \cong -0{,}0082 < 0$, on a 1,14< a <1,15

D'après le tableau de variations de g, g(x) > 0 pour x $\in [0,a[$ et g(x)<0 pour x $\in\ ]a,+\infty[$.

Partie B

1.a) Pour tout x appartenant à $[0,+\infty[$,

$$f'(x) = e^x \frac{x+2-e^x}{(xe^x+1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$$

b) Comme $e^x > 0$, le signe de f '(x) est celui de g(x) . Donc f est croissante sur $[0,a[$ et décroissante sur $]a,+\infty[$.

2.a) Pour tout réel positif x,

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = \frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(x+e^{-x})} = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$$

b) Comme $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ on a donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

La courbe représentative de f admet donc une asymptote d'équation y = 0.

3.a) On a : $g(a) = 0 \Leftrightarrow e^a = a + 2$. En remplaçant e^a par $a+2$ dans l'expression de *f(a)*, on obtient la relation demandée.

b) On en déduit :

$$1{,}14 < a < 1{,}15 \Rightarrow \frac{1}{1{,}15+1} < \frac{1}{a+1} < \frac{1}{1{,}14+1}$$

ce qui fournit un encadrement de *f(a)* d'amplitude 10^{-2} : 0,46< *f(a)<0,47*

4. Une équation de la droite tangente à l'origine est y = x.

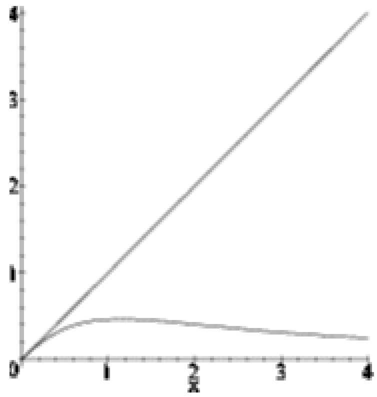
5. a) Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0,+\infty[$

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1 - x^2e^x - x}{xe^x + 1} = \frac{(1+x)(-xe^x + e^x - 1)}{xe^x + 1}$$

b) $u'(x) = -xe^x < 0$ sur $[0,+\infty[$, donc u est décroissante sur $[0,+\infty[$. Comme u(0) = 0, on a donc u(x)= 0 sur $[0,+\infty[$.

c) Sur $[0,+\infty[$, le signe de f(x)-x est celui de u(x) , donc la courbe C est située au-dessous de la droite (T).

6. On obtient la représentation graphique suivante:



Partie C

1. En remarquant que $(e^{-x})' = -e^{-x}$, on trouve que pour tout x de $[0,+\infty[$

$$F(x) = \ln(x + e^{x})$$

2.a) La fonction f est décroissante sur [n, n+1] puisque a <n dès que n=2. Donc pour tout x de [n, n+1] on a:

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

d'où la relation demandée par intégration de cette inégalité entre n et n+1:

Pour tout n=2, on a :

$$f(n+1) \leq v_n \leq f(n) \text{ et } f(n+2) \leq v_{n+1} \leq f(n+1)$$

donc $v_{n+1} \leq v_n$: la suite (v_n) est décroissante pour n=2.

b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = 0$, on en déduit que la suite (v_n) admet en + 8 une limite nulle.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
BP 5084
DAKAR–SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
BP 296
YAOUNDE–CAMEROUN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE L'EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

Exercice

1. Notons $z = a + ib$, avec $a \in I\!R$ et $b \in I\!R$, les solutions de l'équation

$$z^2 = 1 + i, \tag{0.1}$$

alors les réels a et b vérifient le système d'équations suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2 - b^2 & = & 1 \\ 2ab & = & 1 \\ a^2 + b^2 & = & \sqrt{2} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2a^2 & = & 1 + \sqrt{2} \\ 2b^2 & = & \sqrt{2} - 1 \\ 2ab & = & 1 \end{array}\right.$$

Les réels a et b étant de même signe, on en déduit les deux solutions z_1 et z_2 de l'équation (0.1) :

$$z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = (\sqrt{2})^{1/2}\left[\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2^{3/4}} + i\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2^{3/4}}\right] \tag{0.2}$$

$$z_1 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = (\sqrt{2})^{1/2}\left[-\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2^{3/4}} - i\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2^{3/4}}\right] \tag{0.3}$$

2. Représentation de z_1 et de z_2 : voir en fin d'exercice.

3. La forme exponentielle du nombre complexe $1+i$ est $1+i = \sqrt{2}\,(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = \left((\sqrt{2})^{1/2}\ (e^{i\frac{\pi}{8}})\right)^2$; par conséquent le nombre complexe mis sous forme exponentielle $(\sqrt{2})^{1/2}\ (e^{i\frac{\pi}{8}})$ est solution de l'équation (0.1), il est donc égal à l'une de deux solutions trouvées dans la question 1. Comme la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe z_1 sont positives, z_1 a donc un argument compris entre 0 et $\pi/2$, par conséquent $z_1 = (\sqrt{2})^{1/2}\ (e^{i\frac{\pi}{8}})$.
La forme exponentielle de z_1 et la relation (0.2) donne :

$$\cos(\pi/8) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2^{3/4}},$$
$$\sin(\pi/8) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2^{3/4}}.$$

4. La question précédente implique que

$$(1+i)^8 \;=\; 2^4\ e^{i2\pi}. \tag{0.4}$$

D'un autre coté en utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\begin{aligned}(1+i)^8 &= \sum_{j=0}^{8} C_8^j i^j \\ &= (C_8^0 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8) + i(C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7).\end{aligned} \tag{0.5}$$

Des relations (0.4) et (0.5), on déduit que

$$C_8^0 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8 = 2^4 \qquad \text{et} \qquad C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7 = 0.$$

5. D'après les formules d'Euler, on obtient

$$\begin{aligned}\cos^4(a) &= \left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right)^4 \\ &= \frac{C_4^0 e^{4ia} + C_4^4 e^{-4ia} + C_4^1 e^{2ia} + C_4^3 e^{-2ia} + C_4^2}{2^4} \\ &= \frac{1}{2^3}\left[\cos(4a) + 4\cos(2a) + 3\right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^3(a) &= \left(\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}\right)^3 \\ &= \frac{C_3^0 e^{3ia} - C_3^3 e^{-3ia} - C_3^1 e^{ia} + C_3^2 e^{-ia}}{(2i)^3} \\ &= \frac{1}{2^2}\left[-\sin(3a) + 3\sin(a)\right]\end{aligned}$$

6. En utilisant le fait que cos(6x) est la partie réelle du nombre complexe e^{i6x}, et en utilisant la formule de Moivre , on développe e^{i6x} et sa partie rélle est la valeur de cos(6x),

$$\begin{aligned}
e^{i6x} &= (\cos(x) + i\sin(x))^6 \\
&= C_6^6\cos(x)^6 + iC_6^5\cos(x)^5\sin(x) - C_6^4\cos(x)^4\sin(x)^2 - iC_6^3\cos(x)^3\sin(x)^3 + \\
&\quad C_6^2\cos(x)^2\sin(x)^4 + iC_6^1\cos(x)\sin(x)^5 - C_6^0\sin(x)^6 \\
&= \left(\cos(x)^6 - C_6^4\cos(x)^4\sin(x)^2 + C_6^2\cos(x)^2\sin(x)^4 - \sin(x)^6\right) + \\
&\quad i\left(C_6^5\cos(x)^5\sin(x) - C_6^3\cos(x)^3\sin(x)^3 + C_6^1\cos(x)\sin(x)^5\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que

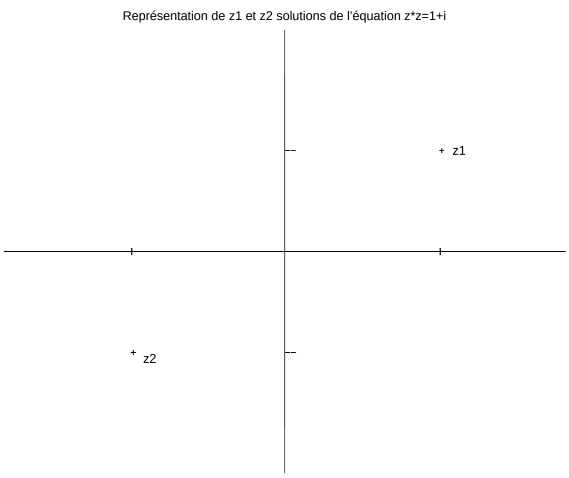
$$\cos(6x) = \cos(x)^6 - 15\cos(x)^4\sin(x)^2 + 15\cos(x)^2\sin(x)^4 - \sin(x)^6.$$

En utilisant le fait que sin(4x) est la partie imaginaire du nombre complexe e^{i4x}, et en utilisant la formule de Moivre , on développe e^{i4x} et sa partie imaginaire est la valeur de sin(4x),

$$\begin{aligned}
e^{i4x} &= (\cos(x) + i\sin(x))^4 \\
&= C_4^4\cos(x)^4 + iC_4^3\cos(x)^3\sin(x) - C_4^2\cos(x)^2\sin(x)^2 - iC_4^1\cos(x)^1\sin(x)^3 + C_4^0\sin(x)^4 \\
&= \left(\cos(x)^4 - C_4^2\cos(x)^2\sin(x)^2 + C_4^0\sin(x)^4\right) + i\left(C_4^3\cos(x)^3\sin(x) - C_4^1\cos(x)\sin(x)^3\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sin(4x) = 4\cos(x)^3\sin(x) - 4\cos(x)\sin(x)^3.$$



Problème

1. $n = 210$.

2.

$\mathcal{C}_i$	n_i	f_i	F_i	L_i	$H_i = 300 \times h_i$	c_i
$\mathcal{C}_1 = [900, 1200[$	5	0.024	0.024	300	0.024	1050
$\mathcal{C}_2 = [1200, 1500[$	60	0.286	0.310	300	0.286	1350
$\mathcal{C}_3 = [1500, 1800[$	15	0.071	0.381	300	0.071	1650
$\mathcal{C}_4 = [1800, 2100[$	95	0.452	0.833	300	0.452	1950
$\mathcal{C}_5 = [2100, 2700[$	30	0.143	0.976	600	0.0715	2400
$\mathcal{C}_6 = [2700, 3300[$	5	0.024	1	600	0.012	3000

3. Voir tableau, question 2.

4. **Fréquence cumulée et Médiane.**

   a. Voir tableau, question 2.

   b. La proportion de salariés qui gagne moins de 1800 Euros est égale à 0.381.

   c. Voir graphe en fin de problème.

   d. La médiane est égale à $Me = 1878.982$ Euros.

5. **Histogramme et Mode.**

   a. Voir tableau, question 2.

   b. Voir tableau, question 2. On a choisi de faire figurer dans le tableau pour chaque classe $\mathcal{C}_i$, $i \in \{1, \ldots, 6\}$, les quantités $H_i = 300h_i$.

   c. Voir graphe en fin de problème.

d. La classe modale est la classe $\mathcal{C}_4 = [1800, 2100[$

6. **Moyenne et Variance.**

a. Voir tableau de la question 2.

b.
$$\bar{x} = \frac{1}{210}(5250 + 81000 + 24750 + 185250 + 72000 + 15000) = \frac{383250}{210} = 1825.$$

Pour le calcul de la variance, on utilise le fait que

$$\text{Var} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} n_i c_i^2 - \bar{x}^2,$$

ce qui conduit au résultat suivant

$$\begin{aligned}\text{Var} &= \frac{1}{210}(5512500 + 109350000 + 40837500 + 361237500 + 172800000 + 45000000) - 3330625\\ &= 168125.\end{aligned}$$

c. Pour calculer VarInter, il nous faut d'abord calculer la moyenne de chaque établissement P_1 et P_2;

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= 1757.625\\ \bar{x}_2 &= 2040,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\text{VarInter} = \frac{1}{210}[160(1757.625^2 - 1825^2) + 50(2040^2 - 1825^2)] = 13943.1074$$

d. Pour le calcul de la variance Intra, il faut d'abord calculer la variance sur chaque établissement P_1 et P_2;

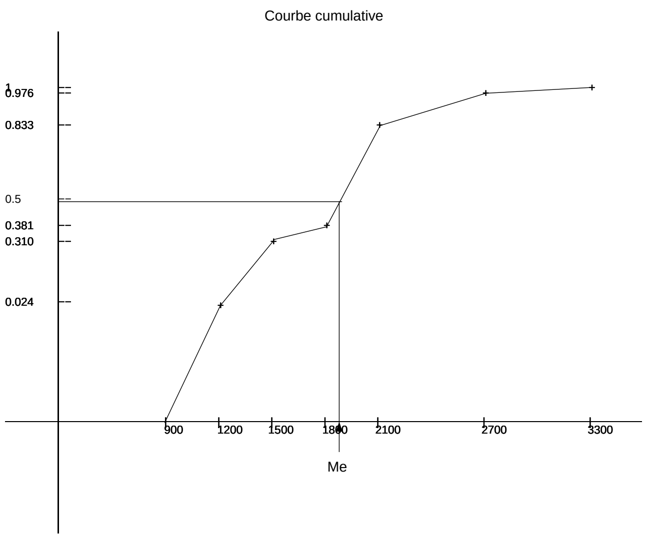
$$\begin{aligned}\text{Var}_1 &= \frac{1}{160}(109350000 + 361237500 + 45000000) - \bar{x}_1^2 = \frac{515587500}{160} - 1757.625^2\\ &= 133176.234\\ \text{Var}_2 &= \frac{1}{50}(5512500 + 40837500 + 172800000) - \bar{x}_2^2 = \frac{219150000}{50} - 2040^2\\ &= 221400\end{aligned}$$

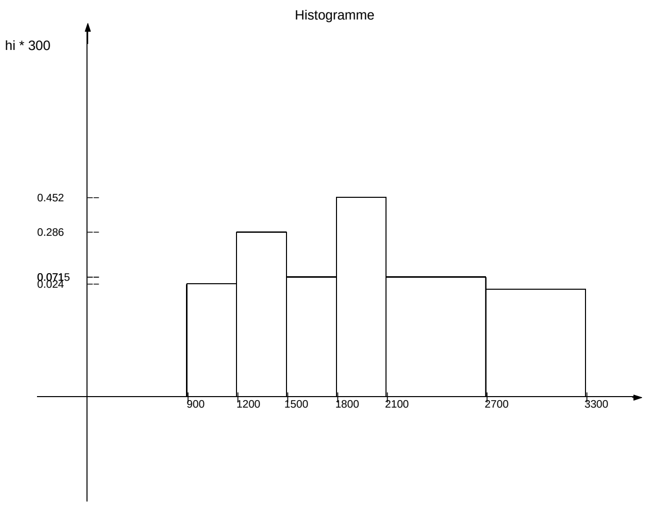
On en déduit la variance Intra,

$$\text{VarIntra} = \frac{1}{210}(160 \times 133176.234 + 50 \times 221400) = \frac{32378197.44}{210} = 154181.8926$$

e. Il faut remarquer que

$$\text{VarIntra} + \text{VarInter} = \text{Var}.$$


Courbe cumulative
1
0.976
0.833
0.5
0.381
0.310
0.024
900
1200
1500
1800
2100
2700
3300
Me


Histogramme
hi * 300
0.452
0.286
0.0715
0.024
900
1200
1500
1800
2100
2700
3300