PRODUITS DE TAUX D'INTERET

Pricing et couverture de produits de taux

ENSAE - DEA MASE Université Paris IX Dauphine- Séance 6

Moez MRAD

SG - R&D TAUX/CREDIT

PLAN

1) Rappel sur les modèles Heath-Jarrow-Morton

Références :

1) Darrell Duffie, “ Modèles dynamiques d’évaluation ”, Puf, 1994

2) Lionel Martellini & Philippe Priaulet, “ Fixed-Income Securities ”, Wiley, 2000

3) Lionel Martellini & Philippe Priaulet, “ Produits de Taux d’Intérêt ”, Economica, 2000

4) Marek Musiela & Marek Rutkowski, “ Martingale Methods in financial Modelling ”, Springer, 1997

Notations

- Le prix en t du zéro-coupon de maturité T : $B(t, T)$
- Le prix en t du zéro-coupon forward entre T_1 et T_2 : $B^f(t, T_1, T_2) = B(t, T_2) / B(t, T_1)$
- Le taux zéro-coupon entre t et T : $R(t, T) = -\frac{1}{T-t}\ln\left(B(t, T)\right)$
- Le taux zéro-coupon forward entre T_1 et T_2 estimé en t : $R^f(t, T_1, T_2) = -\frac{\ln\left(B^f(t, T_1, T_2)\right)}{T_2 - T_1}$
- Le taux instantané forward de maturité T : $f(t, T) = -\frac{\partial \ln\left(B(t, T)\right)}{\partial T}$
- Le taux court ou le taux instantané : $r_t = f(t, t)$
- L'actif non risqué : $\beta_t = \exp\left(\int_0^t r_s\, ds\right)$

HJM(1992)

Considérons un espace filtré $\left(\Omega , F , P , (F_t)_t\right)$**, soit** w_t^P **un mouvement brownien de dimension finie sur cet espace, la filtration** $(F_t)_t$ **est la filtration naturellement engendrée par** w_t^P**. Pour tout** $T \geq 0$**, la diffusion du taux instantané forward est donnée par**

$$\begin{cases} df(t,T) = \alpha(t,T)\ dt + \left\langle \sigma(t,T), dw_t^P \right\rangle \\ f(0,T) = f^{obs}(0,T) \end{cases}$$

Où, pour tout $T \geq 0$**,** $\alpha(t,T)$ **et** $\sigma(t,T)$ **sont deux processus adaptés(i.e** F_t **-mesurables)**

Dynamique sous une mesure martingale risque-neutre

Supposons que AOA-HJM est vérifiée, soit donc Q une mesure telle que sa densité par rapport à P est donné par :

$$\left.\frac{dQ}{dP}\right)_{F_t} = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \|\lambda_s\|^2 ds - \int_0^t \left\langle \lambda_s, dw_s^P \right\rangle\right)$$

La dynamique du taux instantané forward est donnée par :

$$\begin{cases} df(t,T) = \left(\left\langle \sigma(t,T), \int_t^T \sigma(t,s)ds \right\rangle\right)dt + \left\langle \sigma(t,T), dw_t^P \right\rangle \\ \\ f(0,T) = f^{obs}(0,T) \end{cases}$$

<u>Remarque</u> :

La dynamique du taux instantané forward dépend uniquement de la courbe spot $f^{obs}(0,T)$ et de la structure de volatilité $\sigma(t,T)$

Courbes des taux en fonction des conditions initiales

1) Prix zéro-coupon

Dynamique de ZC sous Q

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r_t dt + \left\langle \Gamma(t,T), dw_t^Q \right\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} B(t,T) &= B(0,T)\exp\left(\int_0^t r_s ds - \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\Gamma(s,T)\right\|^2 ds + \int_0^t \left\langle \Gamma(s,T), dw_s^Q \right\rangle\right) \\ &= \frac{B(0,T)}{B(0,t)}.\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \left(\left\|\Gamma(s,T)\right\|^2 - \left\|\Gamma(s,t)\right\|^2\right)ds + \int_0^t \left\langle \left(\Gamma(s,T) - \Gamma(s,t)\right), dw_s^Q \right\rangle\right) \\ &= B^f(0,t,T).\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \left(\left\|\Gamma(s,T)\right\|^2 - \left\|\Gamma(s,t)\right\|^2\right)ds + \int_0^t \left\langle \left(\Gamma(s,T) - \Gamma(s,t)\right), dw_s^Q \right\rangle\right) \end{aligned}}$$

1) Taux zéro-coupon

$$\boxed{R(t,T) = R^f(0,t,T) - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\left\|\Gamma(s,T)\right\|^2 - \left\|\Gamma(s,t)\right\|^2}{T-t} \right) ds + \int_0^t \left\langle \left(\frac{\Gamma(s,T) - \Gamma(s,t)}{T-t} \right), dw_s^Q \right\rangle}$$

2) Taux instantané forward

$$\boxed{f(t,T) = f^{obs}(0,T) + \int_0^t \left(\sigma(u,T) \int_u^T \sigma(u,s) ds \right) du + \int_0^t \sigma(u,T) dw_u^Q}$$

3) Taux court

$$\boxed{r_t = f(t,t) = f^{obs}(0,t) + \int_0^t \left(\sigma(u,t) \int_u^t \sigma(u,s) ds \right) du + \int_0^t \sigma(u,t) dw_u^Q}$$

2) Changement de numéraire

2.1) Généralités

- **Un marché financier (pas nécessairement un marché de taux)**
- **Contenant un actif non risqué** β_t
- **Q une mesure martingale risque-neutre associée à cet actif non risqué**

$$\Downarrow$$

Pour tout actif S de ce marché, Le prix de non-arbitrage actualisé :

$$Z(t) = \frac{S(t)}{\beta_t}$$

est une martingale sous Q

- **Soit Q une mesure martingale risque-neutre donnée et soit** $S_0(t)$ **un processus strictement positif tel que** $S_0(t)/\beta_t$ **est une Q-martingale. On cherche Q* telle que pour tout processus de prix de non-arbitrage** Π**, le processus** $\Pi(t)/S_0(t)$ **est une Q*-martingale.**

- **Considérons un actif contingent qui verse X à l'instant T, son prix de non-arbitrage à l'instant 0 est donné par :**

$$\Pi(0,X) = E^Q\left[\frac{X}{\beta_T}\right]$$

- **Supposons que Q* existe et que sa densité par rapport à Q est donnée par :**

$$\left.\frac{dQ^*}{dQ}\right)_{F_t} = L(t)$$

- **On a** $\frac{\Pi(0,X)}{S_0(0)} = E^{Q^*}\left[\frac{\Pi(T,X)}{S_0(T)}\right] = E^{Q^*}\left[\frac{X}{S_0(T)}\right] = E^Q\left[L(T)\frac{X}{S_0(T)}\right]$ **et** $\Pi(0,X) = E^Q\left[\left(L(T)\frac{S_0(0)\beta_T}{S_0(T)}\right)\frac{X}{\beta_T}\right]$

Proposition 1 :

Soit Q* une mesure dont la densité de Radon-Nikodym par rapport à Q est donnée par :

$$\left.\frac{dQ^*}{dQ}\right)_{F_t} = \frac{S_0(t)}{S_0(0)\beta_t}$$

Soit Π un processus tel que $\Pi(t)/\beta_t$ est une Q-martingale. Alors le processus $\Pi(t)/S_0(t)$ est une Q*-martingale

Proposition 2 :

Considérons un actif contingent qui verse X à l'instant T, son prix de non-arbitrage à l'instant t est donné par :

$$\Pi(t, X) = S_0(t) E^{Q^*}\left[\left.\frac{X}{S_0(T)}\right| F_t\right]$$

2.3) **Mesures Forward**

- On considère un marché de taux donné muni d’une mesure martingale risque neutre spot.
- On considère une maturité T fixée
- On se propose de prendre $B(t,T)$ comme nouveau numéraire

$$\Downarrow$$

On définit la Q^T mesure martingale risque neutre forward associée à la maturité T par :

$$\left.\frac{dQ^T}{dQ}\right)_{F_t} = \frac{B(t,T)}{B(0,T)} \cdot \frac{1}{\beta_t}$$

Proposition 3 :

Considérons un actif contingent qui verse X à l’instant T, son prix de non-arbitrage à l’instant t

est donné par : $\Pi(t,X) = B(t,T) E^{Q^T}\left[X \mid F_t\right]$

<u>Remarques</u> :

1) Le taux instantané forward est lié au taux court par :

$$f(t,T) = E^{Q^T}\left[r_T \,|\, F_t\right]$$

2) La densité de Q^T par rapport à Q est égale à :

$$\left.\frac{dQ^T}{dQ}\right)_{F_t} = \frac{B(t,T)}{B(0,T)} \cdot \frac{1}{\beta_t} = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \left\|\Gamma(s,T)\right\|^2 ds + \int_0^t \left\langle \Gamma(s,T), dw_s^Q \right\rangle \right)$$

3) Le lien entre les deux mouvements browniens est donné par

$$dw_s^{Q^T} = dw_s^Q - \left\langle \Gamma(s,T), ds \right\rangle$$

- **Soient U et V deux maturités supérieures à t. On pose :** $\Gamma(t,U,V) = \Gamma(t,V) - \Gamma(t,U)$

- **Le prix forward en t du zéro-coupon entre U et V est donné par :**

Sous Q :

$$B^f(t,U,V) = B^f(0,U,V)\exp\left(\int_0^t \Gamma(u,U,V)dw_u^Q - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\Gamma(u,V)^2 - \Gamma(u,U)^2\right)du\right)$$

Sous Q^T :

$$B^f(t,U,V) = B^f(0,U,V)\exp\left(\int_0^t \Gamma(u,U,V)dw_u^{Q^T} - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\Gamma(u,T,V)^2 - \Gamma(u,T,U)^2\right)du\right)$$

- **Pour U=T, on a :**

$$B^f(t,T,V) = B^f(0,T,V)\exp\left(\int_0^t \Gamma(u,T,V)dw_u^{Q^T} - \frac{1}{2}\int_0^t \Gamma(u,T,V)^2\,du\right)$$

<u>Remarque :</u> $B^f(t,T,V)$ est une martingale sous Q^T (Résultat attendu)

2.4) **Changement de Numéraire : Cas Général**

- Soit Q^M (resp. Q^N) une mesure associée au numéraire M (resp. N).
- La densité de Radon-Nikodym de Q^N par rapport à Q^M vaut :

a) Cas d'une seule devise :

$$\left.\frac{dQ^N}{dQ^M}\right)_{F_t} = \frac{N(t)}{N(0)} \times \frac{M(0)}{M(t)}$$

b) Cas de deux devises différentes :

(Par exemple N est un numéraire domestique et M est un numéraire étranger)

$$\left.\frac{dQ^N}{dQ^M}\right)_{F_t} = \frac{N(t)}{N(0)} \times \frac{X^{d/f}(0)M(0)}{X^{d/f}(t)M(t)} = \frac{X^{f/d}(t)N(t)}{X^{f/d}(0)N(0)} \times \frac{M(0)}{M(t)}$$

$X^{d/f}$ est le taux change d / f (le prix d'une unité étrangère en monnaie domestique)

3) Evaluation et couverture dans un cadre HJM gaussien

3.1) Option sur un zéro-coupon

Prime en t d'un call européen de maturité T sur un zéro-coupon de maturité T' :

$$C_t = E_Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_s\,ds\right)\left(B(T,T')-K\right)^+\middle|F_t\right]$$

En prenant comme nouveau numéraire $B(t,T)$, on a :

$$\frac{C_t}{B(t,T)} = E_{Q^T}\left[\left(B^f(T,T,T')-K\right)^+\middle|F_t\right]$$

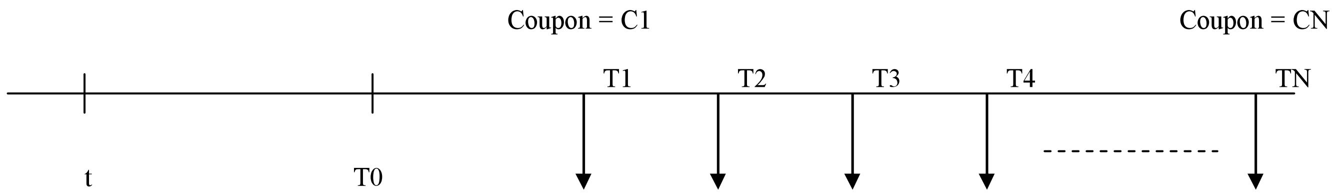
Et, on a :

$$Call_t = B(t,T')N(d_1) - KB(t,T)N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\dfrac{B^f(t,T,T')}{K}\right)}{\sqrt{\int_t^T \Gamma(u,T,T')^2\,du}} + \frac{1}{2}\sqrt{\int_t^T \Gamma(u,T,T')^2\,du} \quad \text{et } d_2 = d_1 - \sqrt{\int_t^T \Gamma(u,T,T')^2\,du}$$

3.2) Option sur une obligation

Echéancier



Prime en t d'un call de maturité T_0 sur obligation de maturité T_N :

$$CO_t = E_Q\left[\exp\left(-\int_t^{T_0} r_s\,ds\right)\left(\sum_{i=1}^{N} C_i B(T_0, T_i) - K\right)^+ \middle| F_t\right]$$

On pose

$$A = \left\{\left(\sum_{i=1}^{N} C_i B(T_0, T_i) - K\right) \geq 0\right\}$$

Le prix est alors donné par:

$$\boxed{CO_t = \sum_{i=1}^{N} C_i B(t,T_i) Q^i(A|F_t) - KB(t,T_0) Q^0(A|F_t)}$$

Solutions pratiques:

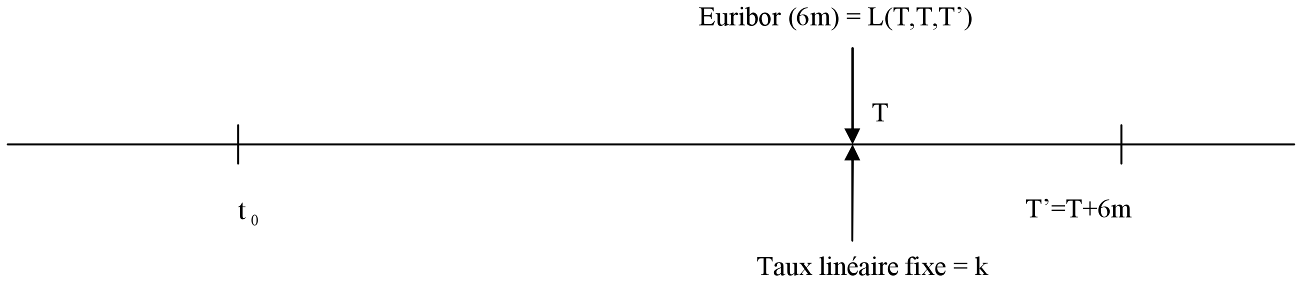
1) ➔ Approximation: $\sum_{i=1}^{N} C_i B(T_0,T_i)$ est log-normale

2) ➔ Formule possible dès que le modèle est markovien et le prix zéro-coupon est monotone en fonction des variables d'état (cf l'exemple d'évaluation dans un cadre vasicek généralisé dans MP)

Remarque : Le prix peut également s'écrire :

$$CO_t = \left(\sum_{i=1}^{N} C_i B(t,T_i) - KB(t,T_0) \right) Q_0(A|F_t) + \sum_{i=1}^{N} C_i B(t,T_i) \operatorname{cov}^{Q_0}\left(\frac{\beta_{T_i}}{\beta_t} B(t,T_i), A \middle| F_t \right)$$

3.3) Forward Rate Agreement



La valeur en t_0 d'un FRA T d'échéance T sur euribor 6 mois (fixing en T) est donnée par :

$$FRA_{t_0} = E_Q\left[e^{\int_{t_0}^{T} r_s ds} \left(1 + \left(T' - T\right)\left[L(T,T,T') - k\right]\right) \middle| F_{t_0} \right]$$

$$= E_Q\left[\frac{e^{\int_{t_0}^{T} r_s ds}}{B\left(T,T'\right)} \middle| F_{t_0} \right] - k\left(T' - T\right) B\left(t_0, T\right)$$

Ce qui donne

$$\frac{FRA_{t_0}}{B(t_0,T)} = E_{Q^T}\left[\frac{1}{B^f(T,T,T')}\middle| F_{t_0}\right] - k(T'-T)$$

On obtient finalement

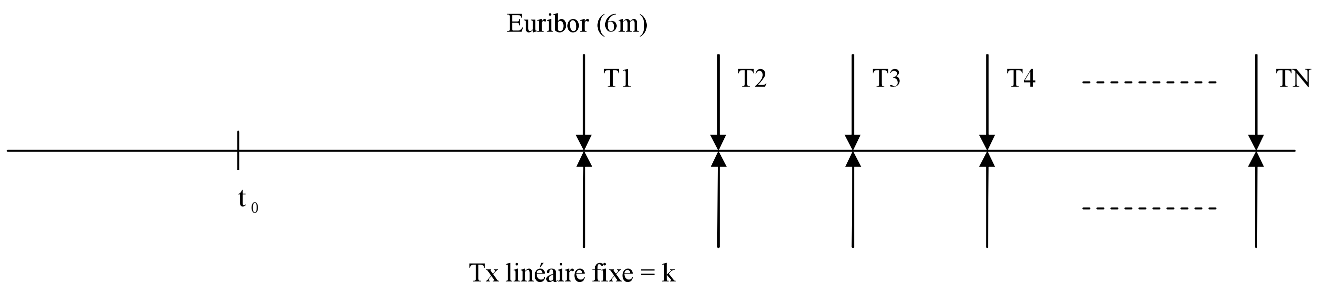
$$\frac{FRA_{t_0}}{B(t_0,T)} = \frac{\exp\left(\int_{t_0}^{T}\Gamma(u,T,T')^2\,du\right)}{B^f(t_0,T,T')} - k(T'-T)$$

➔

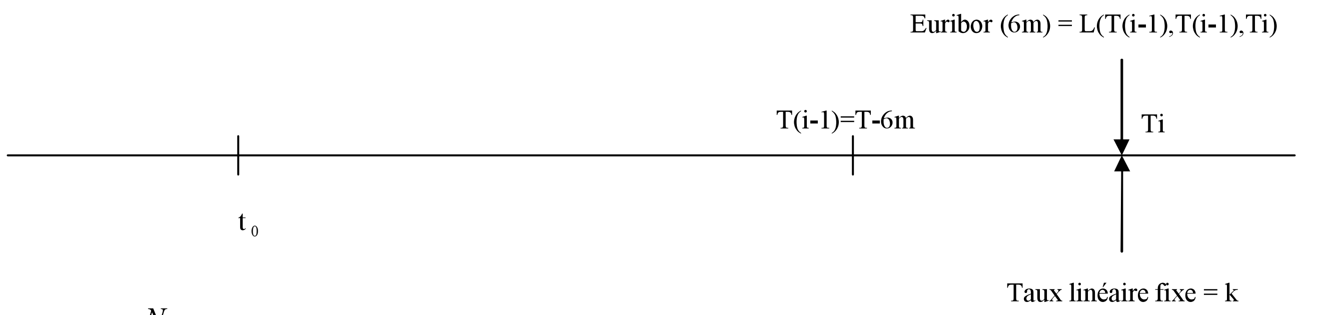
$$FRA_{t_0} = B(t_0,T')\exp\left(\int_{t_0}^{T}\Gamma(u,T,T')^2\,du\right) - kB(t_0,T)(T'-T)$$

3.4) Cap

Echéancier d'un cap



Caplet prépayé



$$\text{Prime d' un cap} = \sum_{i=1}^{N} \text{Prime du caplet (i)}$$

La valeur en t_0 d'un caplet d'échéance T(i) sur euribor 6 mois (fixing en T(i-1)) est donnée par :

$$C_{t_0}^{T_i} = E_Q\left[e^{\int_{t_0}^{T_{i-1}} r_s\, ds} B(T_{i-1}, T_i).\left(T_i - T_{i-1}\right)\left(L(T_{i-1}, T_{i-1}, T_i) - k\right)^+ \middle| F_{t_0} \right]$$

$$= E_Q\left[e^{\int_{t_0}^{T_{i-1}} r_s\, ds} \left(1 - \left(1 + \left(T_i - T_{i-1}\right)k\right) B(T_{i-1}, T_i)\right)^+ \middle| F_{t_0} \right]$$

Ce qui donne

$$\frac{C_{t_0}^{T_i}}{B\left(t_0, T_{i-1}\right)} = E_{Q^{T_{i-1}}}\left[\left(1 - \left(1 + \left(T_i - T_{i-1}\right)k\right) B^f(T_{i-1}, T_{i-1}, T_i)\right)^+ \middle| F_{t_0} \right]$$

Finalement, on obtient :

$$C_{t_0}^{T_i} = B\left(t_0, T_{i-1}\right) N\left(d_1\right) - \left(1 + \left(T_i - T_{i-1}\right)k\right) B\left(t_0, T_i\right) N\left(d_2\right)$$

$$d_1 = \frac{-\ln\left(\left(1 + \left(T_i - T_{i-1}\right)k\right) B^f\left(t_0, T_{i-1}, T_i\right)\right)}{\sqrt{\int_{t_0}^{T_{i-1}} \Gamma\left(u, T_{i-1}, T_i\right)^2 du}} + \frac{1}{2}\sqrt{\int_{t_0}^{T_{i-1}} \Gamma\left(u, T_{i-1}, T_i\right)^2 du} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sqrt{\int_{t_0}^{T_{i-1}} \Gamma\left(u, T_{i-1}, T_i\right)^2 du}$$

3.5) **Floor**

- Echéancier identique à celui d’un cap

- $\text{Prime d'un floor} = \sum_{i=1}^{N} \text{Prime du floorlet (i)}$

- On se couvre contre une baisse de l’euribor

La valeur en t_0 d’un floorlet d’échéance T(i) sur euribor 6 mois (fixing en T(i-1)) est donnée par :

$$F_{t_0}^{T_i} = E_Q\left[e^{\int_{t_0}^{T_{i-1}} r_s ds} B(T_{i-1}, T_i).\left(T_i - T_{i-1}\right)\left(k - L(T_{i-1}, T_{i-1}, T_i)\right)^+ \middle| F_{t_0} \right]$$

$$= E_Q\left[e^{\int_{t_0}^{T_{i-1}} r_s ds} \left(\left(1 + \left(T_i - T_{i-1}\right)k\right)B(T_{i-1}, T_i) - 1\right)^+ \middle| F_{t_0} \right]$$

Relations de parité :

1) $$Caplet\,(t) - Floorlet\,(t) = Swaplet\,(t)$$

2) $$CAP\,(t) - FLOOR\,(t) = SWAP\,(t)$$

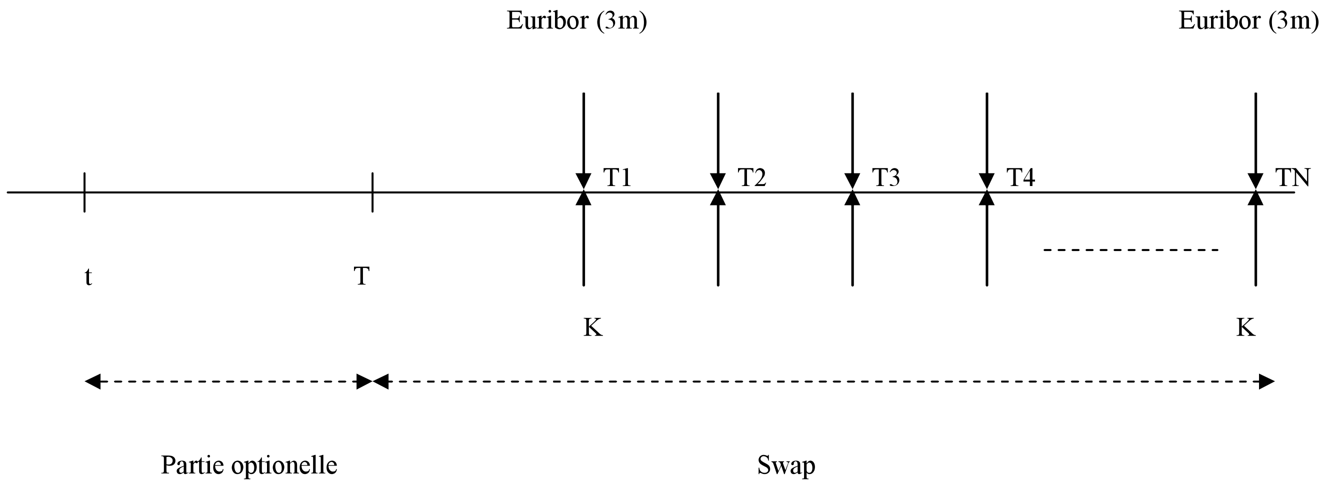
Prix d'un floorlet :

$$F_{t_0}^{T_i} = \left(1 + \left(T_i - T_{i-1}\right)k\right)B\left(t_0, T_i\right)N\left(-d_2\right) - B\left(t_0, T_{i-1}\right)N\left(-d_1\right)$$

$$d_1 = \frac{-\ln\left(\left(1 + \left(T_i - T_{i-1}\right)k\right)B^f\left(t_0, T_{i-1}, T_i\right)\right)}{\sqrt{\int_{t_0}^{T_{i-1}} \Gamma\left(u, T_{i-1}, T_i\right)^2 du}} + \frac{1}{2}\sqrt{\int_{t_0}^{T_{i-1}} \Gamma\left(u, T_{i-1}, T_i\right)^2 du} \text{ et } d_2 = d_1 - \sqrt{\int_{t_0}^{T_{i-1}} \Gamma\left(u, T_{i-1}, T_i\right)^2 du}$$

3.6) Swaption

Echéancier



Pay-off en T

$$\left(Swap\left(K, T, T_1, T_N\right)\right)^+$$

La valeur du *swap payeur* de strike K à l'instant T est alors donnée par :

$$Swap(K,T,T_1,T_N) = Jambe\_Variable - Jambe\_fixe$$

$$= B(T,T_0) - B(T,T_N) - \sum_{i=1}^{N} \delta K B(t,T_i)$$

➔ Une swaption peut être vue comme une option sur obligation

Remarque

On définit le taux swap à l'instant t est donnée par :

$$TXS(t,T_1,T_N) = \frac{B(t,T_0) - B(t,T_N)}{\delta \sum_{i=1}^{N} B(t,T_i)}$$

La valeur du *swap payeur* de strike K à l'instant t est alors donnée par :

$$Swap(K,t,T_1,T_N) = \delta \sum_{i=1}^{N} B(t,T_i)\left[TXS(t,T_1,T_N) - K\right]$$

4) Correction de convexité

- Possibilité de definir des options européennes « exotiques ».
- Les flux sont versés à une date « non naturelle » (Exp : Libor in arrears, CMS)
- Les flux sont versés dans une devise « non naturelle » (Exp : Swap Quanto)
- Les produits restent relativement simples.
- Conduit traditionnellement à une approximation de pricing

- Idée principale

$$E^{Q^M}\left(X_T \middle| F_t\right) = E^{Q^N}\left(X_T L_T / L_t \middle| F_t\right) = E^{Q_N}\left(X_T\right) + Cov^N\left(X_T, L_T / L_t \middle| F_t\right)$$

où L est la densité de Q^M par rapport à Q^N.

4.1) Correction de convexité In Arrears

- Un Flux (par exp. Libor) in advance (cas classique) fixe (i.e. est connu) en début de période (= T) et paye en fin de période (= T+δ).

- Un Flux in arrears fixe (i.e. est connu) et paye (i.e. est versé ou reçu) à la même date.

- Soit X_T un flux in arrears qui fixe et paye en T :

$$E^{Q_T}\left(X_T \middle| F_t\right) = E^{Q_{T+\delta}}\left(X_T \middle| F_t\right) + Cov^{Q_{T+\delta}}\left(X_T, \frac{B^{forward}(T,T,T+\delta)^{-1}}{B^{forward}(t,T,T+\delta)^{-1}} \middle| F_t\right)$$

$$= E^{Q_{T+\delta}}\left(X_T \middle| F_t\right) + Cov^{Q_{T+\delta}}\left(X_T, \frac{1+\delta L(T,T,T+\delta)}{1+\delta L(t,T,T+\delta)} \middle| F_t\right)$$

➔ Exo : Application à un Libor.

4.2) Correction de convexité Quanto

- Considérons par exemple un Libor étranger. On a :

$$
\begin{aligned}
E^{Q^d_{T+\delta}}\left(L^f(T,T,T+\delta)\middle|F_t\right) &= E^{Q^f_{T+\delta}}\left(L^f(T,T,T+\delta)\middle|F_t\right) \\
&\quad + Cov^{Q^f_{T+\delta}}\left(L^f(T,T,T+\delta), \frac{X^{d/f}_{T+\delta}B^f(T+\delta,T+\delta)}{X^{d/f}_t B^f(t,T+\delta)} \times \frac{B^d(t,T+\delta)}{B^d(T+\delta,T+\delta)}\middle|F_t\right) \\
&= L^f(t,T,T+\delta) + +Cov^{Q^f_{T+\delta}}\left(L^f(T,T,T+\delta), \frac{X^{d/f}_{T+\delta}B^d(t,T+\delta)}{X^{d/f}_t B^f(t,T+\delta)}\middle|F_t\right) \\
&= L^f(t,T,T+\delta) + +Cov^{Q^f_{T+\delta}}\left(L^f(T,T,T+\delta), \frac{X^{d/f}_{forward}(T+\delta,T+\delta)}{X^{d/f}_{forward}(t,T+\delta)}\middle|F_t\right)
\end{aligned}
$$

où $X^{d/f}_{forward}$ est le taux de change forward, définit par :

$$
X^{d/f}_{forward}(t,T) = X^{d/f}_t \frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)}
$$