ENSAE B/L Maths I
Préparation : 30 min
Présentation : 30 min

Planche 13

Ce sujet est composé de deux exercices.
Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe des matrices B et C de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = BC - CB$. Que peut-on dire de $\mathrm{Tr}(A)$?

2. Soient d_1, d_2 deux nombres réels distincts et D la matrice diagonale de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont d_1 et d_2.
   a) Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer $DM - MD$.
   b) Soit $N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Démontrer que les éléments diagonaux de N sont nuls si, et seulement si, il existe $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $N = DM - MD$.

3. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice non nulle de trace nulle.
   a) On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A. On note (e_1, e_2) la base canonique.
   Démontrer que $(e_1, f(e_1))$ ou $(e_2, f(e_2))$ ou $(e_1 + e_2, f(e_1) + f(e_2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   b) En déduire qu'il existe, dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, une matrice inversible P et une matrice A' de diagonale nulle telles que $A = PA'P^{-1}$.
   c) En déduire qu'il existe deux matrices B et C de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = BC - CB$.

Exercice 2.

Une urne contient des boules blanches, des boules noires et des boules rouges en proportions égales (c'est-à-dire 1/3 pour chaque couleur). On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise.

On note N (respectivement B) le numéro du tirage d'obtention de la première boule noire (respectivement blanche).

On pose $D = |N - B|$.

1. Déterminer les lois de N et B, leur espérance et leur variance.

2. a) Démontrer que, pour tous $i, k \in \mathbb{N}^*$, on a $P\big((B = i) \cap (N = k + i)\big) = \dfrac{2^{k-1}}{3^{k+i}}$.
   b) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $P(N = B + k)$.
   c) En déduire que D suit la loi géométrique de paramètre 1/3.

3. Calculer $E(D^2)$ et en déduire $\mathrm{Cov}(N, B)$.

4. Calculer $P\big((D = 1) \cap (N = 2)\big)$. Les variables D et N sont-elles indépendantes ?

ENSAE B/L Maths I
Préparation : 30 min
Présentation : 30 min

Planche 10

Ce sujet est composé de deux exercices.
Vous présenterez ces <u>deux</u> exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1.

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel. Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. a) Démontrer que p est une projection.
   b) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} p$ et une base de $\operatorname{Im} p$.
   c) Démontrer que p est une projection orthogonale sur un plan $\mathscr{P}$ dont on donnera une équation.
2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   a) Calculer la distance de u au plan $\mathscr{P}$.
   b) En déduire que $\dfrac{|2x - y + z|}{\sqrt{6}} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Exercice 2.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de loi normale centrée réduite (on a donc $E(X) = E(Y) = 0$ et $V(X) = V(Y) = 1$). On note Φ la fonction de répartition de X et φ une densité de X.

On pose $Z = \max(X, Y)$.

1. Donner une densité d'une variable aléatoire de loi normale d'espérance 0 et de variance σ^2.
2. a) Déterminer la fonction de répartition de Z à l'aide de Φ.
   b) En déduire que Z admet une densité f définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\varphi(x)\Phi(x)$.
3. a) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que
   $$\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$
   ► On démontre de même (on ne vous demande pas de le faire) que
   $$\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$
   b) En déduire la valeur de $E(Z)$.
4. a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
   b) Déterminer la fonction de répartition de X^2 à l'aide de Φ.
   c) Démontrer que X^2 et Z^2 ont la même loi.
   d) En déduire $V(Z)$.