J. 17 1218

UHCE 754

SESSION 2017

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon – Paris-Saclay (Cachan) – ENSAE – ENSAI

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 6 pages, numérotées de 1 à 6.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Tournez la page S.V.P.

L'exercice et les deux problèmes qui suivent sont indépendants et peuvent donc être abordés dans un ordre laissé au libre choix.

Dans l'ensemble du sujet, pour répondre à une question, on pourra admettre les résultats des questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Il sera fait grand cas lors de la correction de la clarté, de la concision et de la précision de la rédaction.

Exercice. Soit $n \geq 1$ un entier. On note $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.

(1) Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f : \begin{array}{ccc}]0, \infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln(x) - x \end{array}$$

(a) Calculer $f(1)$ et $f(e)$.

(b) Calculer $\lim_{x \to 0} f(x)$ et $\lim_{x \to \infty} f(x)$. Justifiez vos réponses.

(c) Dresser, avec justifications, le tableau de variations de f.

(d) Calculer l'équation de la droite Δ, tangente à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f en $x = e$.

(e) Représenter sur une même figure Δ et $\mathscr{C}$.

(2) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale $\int_0^n \ln(x)\, \mathrm{d}x$ est convergente en 0 et que $\int_0^n \ln(x)\, \mathrm{d}x = n\ln(n/e)$.

(3) (a) Montrer que pour tout entier $1 \leq i \leq n$,

$$\int_{i-1}^{i} \ln(x)\, \mathrm{d}x \leq \ln(i).$$

(b) En déduire que $n\ln(n/e) \leq \ln(n!)$.

(4) Soit $1 \leq k \leq n$ un entier.

(a) Montrer que $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$.

(b) En déduire que $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k$.

(5) On considère n urnes numérotées de 1 à n. On lance successivement n balles discernables dans ces urnes uniformément au hasard de manière indépendante. On note X_i le nombre de balles qui tombent dans l'urne i.

(a) Justifier que pour tout entier $0 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}.$$

(b) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles (mutuellement) indépendantes ? Justifiez votre réponse.

(c) Calculer la limite de $\mathbb{P}(X_1 = 0)$ lorsque $n \to \infty$.

(d) Calculer $\mathbb{E}[X_1]$.

(e) Montrer que pour tous $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $j \in \{3, 4, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X_i \geq j) \leq \left(\frac{e}{j}\right)^j \frac{1}{1 - e/j}.$$

(f) Soit $c > 1$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\text{il existe une urne avec au moins } \frac{c \ln(n)}{\ln(\ln(n))} \text{ balles}\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Tournez la page S.V.P.

Problème A.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. On pose $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ pour tout entier $k \geq 0$.

Préliminaires.

(1) Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} p_k s^k$ converge pour tout $0 \leq s \leq 1$.

Dans la suite, on pose

$$f(s) = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k s^k$$

pour tout $0 \leq s \leq 1$.

(2) Déterminer les valeurs de $f(0)$ et de $f(1)$.

* * *

Soit u_0 un nombre réel tel que $0 \leq u_0 \leq 1$.
On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$.

Les trois parties qui suivent sont indépendantes entre elles.

* * *

Première partie. Dans cette partie, on étudie le cas particulier où $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$.

(3) (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2}$.

(b) Montrer que la suite (z_n) définie par $z_n = u_n - 1$ est une suite géométrique.

(c) En déduire une expression de u_n.

(4) Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite qu'on déterminera.

(5) Soit V une variable aléatoire à valeurs dans $[0, 1]$ qui suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. On considère la suite $(V_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} V_0 = V \\ V_{n+1} = f(V_n) \text{ pour } n \geq 0. \end{cases}$$

(a) Soit $n \geq 0$. Montrer que la variable aléatoire V_n admet une espérance et la calculer.

(b) La variable aléatoire $\frac{1}{V_0}$ admet-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

(c) Soit $n \geq 1$. La variable aléatoire $\frac{1}{V_n}$ admet-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

* * *

Deuxième partie. Dans cette partie, on fixe $r \in]0,1[$ et on étudie le cas particulier où $p_k = (1-r)r^k$ pour tout entier $k \geq 0$.

(6) Calculer $f(s)$ pour $s \in [0,1]$.

(7) (a) Trouver un polynôme P tel que $1 - 4x + 4x^2 = P(x)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Trouver tous les nombres réels $s \in [0,1]$ tels que $f(s) = s$.

(8) Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite qu'on déterminera.

* * *

Troisième partie. Dans cette partie, on étudie quelques propriétés générales de f.

(9) Montrer que la fonction f est croissante sur $[0,1]$.

(10) Montrer que la fonction f est continue sur $[0,1]$.

Indication. On pourra commencer par montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $K_\epsilon \geq 1$ tel que $\forall s \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{k \geq K_\epsilon} p_k s^k \leq \epsilon$.

Problème B. Soit $n \geq 1$ un entier et $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ des nombres réels. Soit P le polynôme défini par

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n.$$

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels. La matrice $C_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, appelée matrice compagnon de P, est définie par

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On note $\mathbf{I}_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) (Exemples)

(a) Donner la matrice compagnon C_Q du polynôme $Q(X) = (X-2)^2(X+1)$.

(b) Déterminer le polynôme R dont la matrice compagnon est $C_R = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(c) Quelles sont les racines de R ? Quelles sont les valeurs propres de C_R ? Que constatez-vous ?

(d) La matrice C_R est-elle diagonalisable ? Justifiez votre réponse.

(2) (a) Déterminer le rang de C_P et la dimension du noyau de C_P.
Indication. On pourra distinguer deux cas : le cas où $a_0 = 0$ et le cas où $a_0 \neq 0$.

(b) Justifier que 0 est valeur propre de C_P si et seulement si $P(0) = 0$.

(c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(C_P - \lambda \mathbf{I}_n)) \leq 1$.

(3) L'application qui à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $a_0\mathbf{I}_n + a_1 A + \cdots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n$ est-elle une application linéaire ?

Dans la suite, on considère $M_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$M_P = a_0 \mathbf{I}_n + a_1 C_P + a_2 C_P^2 + \cdots + a_{n-1} C_P^{n-1} + C_P^n.$$

On note

$$(E_1, E_2, \ldots, E_n) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

les n vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(4) L'objectif de cette question est de montrer que M_P est la matrice nulle.

(a) (Exemple) Vérifier que M_R est la matrice nulle, où R est le polynôme défini à la question (1)(b).

(b) Montrer que pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$, $E_k = C_P^{k-1} E_1$.

(c) En déduire qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $(X, C_P X, \dots, C_P^{n-1} X)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

(d) Montrer que $M_P E_1 = 0$.

(e) Montrer que M_P est la matrice nulle.

(5) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de C_P et $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé.

(a) Montrer que $M_P X = P(\lambda) X$.

(b) En déduire que λ est racine de P.

(6) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$.

(a) On suppose uniquement dans cette question (6)(a) qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tel que $C_P X = \lambda X$. Montrer que

$$x_{n-k} = \left(a_{n-k} + \lambda a_{n-k+1} + \cdots + \lambda^{k-1} a_{n-1} + \lambda^k\right) x_n$$

pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

(b) Montrer que λ est valeur propre de C_P et exhiber un vecteur propre associé.

(7) Soit $k \geq 1$ un entier. On considère $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des nombres réels tous distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des entiers positifs ou nuls. Finalement, on définit le polynôme S par $S(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice compagnon C_S de S soit diagonalisable.

(b) Lorsque $n \geq 2$, donner un exemple de matrice de taille $n \times n$ non diagonalisable.