Ce sujet est composé de deux exercices.
Vous présenterez ces <u>deux</u> exercices dans l'ordre de votre choix.

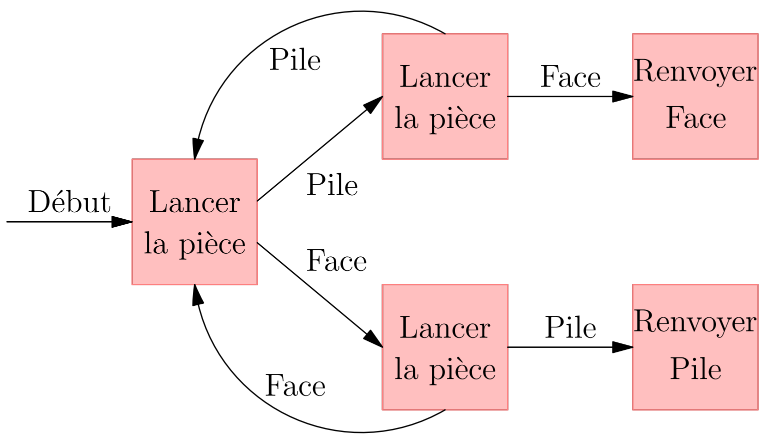
Exercice 1.

Soient a et b deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $a \circ b = b \circ a = 0$ et que $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(a^2)$, où a^2 désigne $a \circ a$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Ker}(a^2)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(a) \oplus \mathrm{Im}(a) = \mathbb{R}^n$.
3. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(a) + \mathrm{Ker}(b)) = n$.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(a+b) = \mathrm{Ker}(a) \cap \mathrm{Ker}(b)$.
5. Montrer que $\mathrm{rg}(a+b) = \mathrm{rg}(a) + \mathrm{rg}(b)$.

Exercice 2.

On dispose d'une pièce truquée qui renvoie “pile” avec une probabilité $p \in]0,1[$ et on souhaite s'en servir pour générer un pile ou face équilibré. John von Neumann a imaginé l'algorithme suivant (où les lancers successifs de la pièces truquée se font indépendamment) :



On note $T \in \{2, 4, 6, \ldots\}$ la variable aléatoire donnée par le nombre de lancers nécessaires pour que l'algorithme se termine, et $R \in \{P, F\}$ le résultat de l'algorithme (où on note P pour “pile” et F pour “Face”).

1. Que valent T et R si on obtient comme premiers tirages $PPPPFFFPPPFFP$?
2. Démontrer que pour tout $k \geq 1$,
$$\mathbb{P}(T = 2k) = \left(p^2 + (1-p)^2\right)^{k-1} 2p(1-p).$$
En déduire que l'algorithme se termine presque-sûrement, c'est-à-dire que
$$\mathbb{P}(T < \infty) = 1.$$
3. Démontrer que l'algorithme renvoie bien “pile” ou “face” avec même probabilité, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(R = P) = 1/2$.
4. Calculer $\mathbb{E}[T]$.

Ce sujet est composé de deux exercices.
Vous présenterez ces deux exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1.

On désigne par $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à coefficients réels, muni des opérations $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}+(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\lambda\cdot(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour toutes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et tout nombre réel λ. C'est un espace vectoriel (admis).

Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 16u_n = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Déterminer l'ensemble des éléments de E qui sont des suites géométriques. Donner une famille libre à 2 éléments constituée de telles suites.
3. Soit
$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array} \right.$$
Montrer que ϕ est un isomorphisme.
4. En déduire la dimension de E.
5. Donner l'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par ϕ. Montrer que c'est une base. Donner les coordonnées des suites trouvées dans la question 2 dans cette base.

Exercice 2.

Soient $(a_i)_{1\le i\le n}$ des nombres réels tels que $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$ et $(X_i)_{1\le i\le n}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On pose

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i.$$

Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $c > 0$, on a $\mathbb{P}(|S| \ge c) \le 2e^{-\frac{c^2}{2}}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \le e^{\frac{x^2}{2}}$.
Indication. On pourra utiliser le fait que $e^u = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u^i}{i!}$ *pour tout* $u \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{tS} admet une espérance et que $\mathbb{E}\left[e^{tS}\right] \le e^{\frac{t^2}{2}}$.
3. Montrer que pour tout $c > 0$, on a $\mathbb{P}(S \ge c) \le e^{-\frac{c^2}{2}}$.
4. En déduire que $\mathbb{P}(|S| \ge c) \le 2e^{-\frac{c^2}{2}}$.